

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2008~2012

課題番号：20244005

研究課題名(和文) 複素多様体上の Ricci soliton の幾何

研究課題名(英文) Geometry of Ricci solitons on complex manifolds

研究代表者

満淵 俊樹 (MABUCHI TOSHIKI)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80116102

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素多様体

1. 研究計画の概要

この研究は、Kähler-Ricci soliton に関する以下の課題に取り組み、その解決をはかることを目指す。

(1) 二木-小野-Wang が toric 幾何の立場から佐々木多様体に関連した結果として得たものを、もう少し広い枠組み、すなわち Kähler-Ricci soliton をもつ Fano 多様体に関する結果として再構成する。

(2) Donaldson-Tian-Yau 予想を考察するとともに、AdS/CFT 対応についての種々の予想を考察する。

(3) 複素射影平面の 3 点 blowing-up 上の Kähler-Einstein 計量や、2 点 blowing-up 上の Kähler-Ricci soliton の explicit な表示を求めたい。

このうち (1) については、研究代表者および研究分担者である中川(金沢大)が研究チームを作って解決にあたり、(2) については、研究代表者および平成 22 年度まで研究分担者であった後藤(阪大)が研究チームを作って解決にあたり、(3) については、研究代表者と研究分担者の佐々木(神戸大)および長谷川(新潟大)研究チームを作って解決にあたる計画である。

2. 研究の進捗状況

現在プロジェクト開始時から数えてちょうど折り返しの 3 年目を終わるところで、上の 3 つの課題への取り組みを本格化させた。部分的には研究成果をいくつか得た。

(1) Kähler-Ricci soliton と関連して中川氏と共同で行っている non-toric な場合も含む佐々木アインシュタイン計量の構成法については、昨年来の検証作業を無事終え、結果の最も簡単な場合を「New examples of

Sasaki-Einstein manifolds」という論文にまとめた。この成果を査読付き雑誌に投稿した。

(2) 「Kähler-Ricci soliton の幾何」と深く関連する Donaldson-Tian-Yau 予想については、特に存在問題の extremal Kähler 版を中心に研究を行った。その一環として、菅平で第 14~16 回国際複素幾何シンポジウムを主催して知見を深め、さらにインドで開かれた ICM サテライト会議 Geometric topology and Riemannian geometry, Bangalore において発表を行った。その結果の一部は

「Asymptotics of polybalanced metrics under relative stability constraints」として Osaka J. Math. に掲載予定である。

(3) 「複素射影平面の 3 点 blowing-up 上の Kähler-Einstein 計量に explicit な表示を与える」という研究課題については、具体的な実モンジュ・アンペール方程式を境界値付きで解くことに帰着されるが、研究室でプロジェクトチームを組み丹念な解析を行うことによって、方程式に優解と劣解を構成し、それらを用いてかなり詳しい近似解を漸近展開の形で与えることが可能となった。この結果については、現在検証中であるとともに論文にとりまとめ中でもある。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由) 取り組んでいた課題のいくつかには、ある程度の解決が得られ、その成果が既に論文の形にまとまったり、国際シンポジウムで発表を行ったものもあるから。

4. 今後の研究の推進方策

研究計画の概要の項で述べた各課題に関し

(1) については、中川氏と共同で成果「New examples of Sasaki-Einstein manifolds」を得たが、これをさらに一般化した形の Kähler-Einstein 多様体上の toric bundle に対する佐々木アインシュタイン計量の存在と Kähler-Ricci soliton の存在についての予想の解決を目指している。

(2) の Donaldson-Tian-Yau 予想については、立命館大の新田氏との共同研究が進行中で、これをさらに発展させた形の成果を出すことを目指している。

(3) については、複素射影平面の 3 点 blowing-up 上の Kähler-Einstein 計量の explicit な表示を導き出すための Fubini-Pick 不変量の近似解をいくつか得たが、この精度をさらに高めることを計画している。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① T. Mabuchi: Asymptotics of polybalanced metrics under relative stability constraints, Osaka J. Math. 48 (2011), to appear, 査読有り.
- ② R. Goto: Poisson structures and generalized Kähler submanifolds, J. Math. Soc. Japan 61 (2009), 107-132, 査読有り.
- ③ T. Mabuchi: An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds II, Osaka J. Math. 46 (2009), 115-139, 査読有り.
- ④ T. Mabuchi: Asymptotic structures in the geometry of stability and extremal metrics, in "Handbook of Geom. Anal. No.1" Internat. Press, Adv. Lect. in Math. 7 (2008), 277-300, 査読有り.
- ⑤ T. Mabuchi: Chow-stability and Hilbert-stability in Mumford's Geometric invariant theory, Osaka J. Math. 45 (2008), 833-846, 査読有り.

[学会発表] (計 5 件)

- ① T. Mabuchi: On the existence problem of extremal Kähler metrics, Workshop on extremal metrics, 2011 年 3 月 24 日, Stony Brook University, USA.
- ② T. Mabuchi: Donaldson-Tian-Yau's conjecture and its extremal Kähler version, ICM satellite conference (Geometric topology and Riemannian geometry), 2010 年 8 月 12 日, Bangalore, India.
- ③ T. Mabuchi: Stability and extremal metrics for projective bundles, 1st PRIMA Congress, 2009 年 7 月 7 日, University of New South Wales, Sydney.

④ T. Mabuchi: Characterization of K-polystability by an asymptotic expansion of the Chow norm, Perspectives in Geometric Analysis, 2008 年 10 月 31 日, Beijing International Research Center.

⑤ T. Mabuchi: K-polystability for CSC polarization, Ricci curvature and complex geometry, 2008 年 6 月 6 日, Inst. Henri Poincare, Paris.