

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 6月 5日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2008～2011

課題番号：20244006

研究課題名（和文） ナヴィエ・ストークス方程式および関連する力学系の応用解析

研究課題名（英文） Applied Analysis on the Navier-Stokes Equations
and Related Dynamical Systems

研究代表者

岡本 久（OKAMOTO HISASHI）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：40143359

研究成果の概要（和文）：数理流体力学の基本方程式である、ナヴィエーストークス方程式とオイラー方程式について、その特異点および擬特異点の探索を行った。その中でProudman-Johnson方程式や積分制約条件付きの反応拡散系の解の分岐を計算した。様々な分岐解を分類することによって、ユニモード解が2次元流でしか現れないという予想を裏付けることができた。この研究が、解の爆発とも関係があることが示唆されている。

水面進行波中の流体粒子を考察し、その軌道を計算した。いわゆるストークス漂流を数学的に証明し、粒子の軌道を様々なパラメータで数値計算した。証明方法はきわめて初等的であり、これまで知られているどの証明方法よりもわかりやすい。数値計算は、これまで重力波でしか計算されていなかったのであるが、表面張力を考慮しても同様に計算できる方法を編み出した。

研究成果の概要（英文）：The Navier-Stokes equations and the Euler equations are the master equations of the fluid mechanics. We searched for singularity and pseudo singularity. The Proudman-Johnson equation and reaction-diffusion equation with integral constraint were studied. By numerically computing solutions, we found that a topologically simple solutions exists and they exist only in two-dimensional Navier-Stokes equations and those closely related to it.

Trajectories of fluid particles in a progressive water-waves were computed. What is called the Stokes drift was proved mathematically. Our proof is simpler than any other proof and easily adapted to the numerical computation. Our numerically method enables us to compute not only the gravity waves but also capillary-gravity waves.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	6,700,000	2,010,000	8,710,000
2009年度	5,300,000	1,590,000	6,890,000
2010年度	4,400,000	1,320,000	5,720,000
2011年度	5,300,000	1,590,000	6,890,000
年度			
総計	21,700,000	6,510,000	28,210,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般

キーワード：ナヴィエーストークス方程式 解の特異点 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

ナビエーストークス方程式は純粋数学から物理学・工学までの幅広い研究対象と成っている。しかし、その背景にはわかっていないことが多かった。コルモゴロフの問題など特殊な問題をとっかかりにして、力学系的なアプローチで研究することは重要であると認識されていた。Navier-Stokes 方程式は流体力学の基礎方程式である。そこには多くの未解決問題が数学者の挑戦を待っている。それらは多くの場合、既存の方法を当てはめれば何とかなるというのではなく、独特の工夫を必要とすることが多い。そして、そうした工夫がしばしば新しい数学的手法を生み出してきた。非線形偏微分方程式に対する位相幾何学的方法も、もともとは 1930 年代に Leray らが Navier-Stokes 方程式の解の存在を証明するための工夫から発展したものである。

2. 研究の目的

ナビエーストークス方程式およびそれに関連する力学系あるいは偏微分方程式モデル。を理論的・数値的に研究し、特異点の構造を初めとする未解決問題に挑戦する。特に、解の定量的な性質を研究することを目的とする。本研究では、以下の諸問題に挑戦した。①Navier-Stokes 方程式の厳密解に関する問題、②曲面上の渦の動力学に関する木村の予想とその解決、③水面波の諸問題、特に極限波の形状決定問題。④流体の運動などに現れる特異点を高精度で計算する数値スキームの開発、A: Navier-Stokes 方程式に関連する適切性の問題、B: Euler 方程式の解の特異点あるいは擬特異点の問題、C: 境界層や内部遷移層の物理的な役割を定める問題。

3. 研究の方法

さまざまなモデルを考案し、その数値実験を通じて、どのようなシナリオが可能となるのかを推定し、それを理論的に確かめる。解の定量的な性質を研究するために、大量の数値実験を行う。流体の諸問題を数値実験するときには様々な数値積分を実行する必要がある。そのため様々な数値計算パッケージが開発されてきたが、そうした既製のソフトでは本研究には不十分なことが多い。その理由のひとつに、我々の目標が必ずしも滑らかでない関数を高精度で近似することに帰着されることが多いことがあげられる。既存の方法

は、解が滑らかならば確実に計算してくれることが多いが、微分可能でない、あるいは不連続であるような解を高精度で近似するには、問題に応じたきめ細かなアルゴリズムを自ら開発する必要に迫られる。そこで、本研究では数値計算法の開発と流体方程式への応用を柱のひとつに据えている。

4. 研究成果

数流体力学の基本方程式である、ナビエーストークス方程式とオイラー方程式について、その特異点および擬特異点の探索を行った。その中で Proudman-Johnson 方程式や積分制約条件付きの反応拡散系の解の分岐を計算した。様々な分岐解を分類することによって、unimodal solution が 2 次元流でしか現れないという予想を裏付けることができた。この研究が、解の爆発とも関係があることが示唆されている。これは大変おもしろい現象であるが、理由はまだわかっていない。引き続き今年度もそのメカニズムを追求したい。

水面波の問題で粒子の軌道に関する新しい計算法を開発した。ストークス漂流という現象を感銘勝厳密な方法で証明した。2次元ナビエーストークス方程式が、レイノルズ数が大きいときにトポロジ的に単純な解を安定に持つことがある、という不思議な現象を発見した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① H. Okamoto, Blow-up problems in the strained vorticity dynamics and critical exponents, accepted by Journal of Mathematical Society of Japan 査読有

② H. Okamoto, A nonlinear boundary-value problem with an integral constraint, to appear in Proceedings of 'Far-From-Equilibrium Dynamics', to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu. 査読有

③ S.-C. Kim and H. Okamoto, The generalized Proudman-Johnson equation at

large Reynolds numbers, IMA J. Appl. Math., Online, 2011 査読有
doi: 10.1093/imamat/hxr054

④ Sun-Chul Kim and Hisashi Okamoto, Vortices of large scale appearing in the 2D stationary Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers, Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 27 (2010), 47--71. 査読有
DOI: 10.1007/s13160-010-0010-0

⑤ Mayumi Shoji, Hisashi Okamoto and Takuya Ooura, Particle trajectories around a running cylinder or a sphere, Fluid Dynamics Research vol. 42 (2010), 025506(10pp). 査読有 doi:
10.1088/0169-5983/42/2/025506

⑥ H. Okamoto, Well-posedness of the generalized Proudman-Johnson equation without viscosity, J. Math. Fluid Mech. vol. 11 (2009), 46--59. 査読有
DOI: 10.1007/s00021-007-0247-9

⑦ H. Okamoto, T. Sakajo, and M. Wunsch, On a generalization of the Constantin-Lax-Majda equation, Nonlinearity, VOL. 21 (2008) 2447--2461. 査読有
doi: 10.1088/0951-7715/21/10/013

[学会発表] (計 20 件)

① H. Okamoto, "Trajectories of fluid particles in a periodic water-wave" The 8th East-Asia PdE Conference, 21, Dec. 2011, Pohang, Korea. 招待講演

② H. Okamoto, "Finite Difference Methods for Blow-up Problems" SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 14/11/2011 San Diego 米国.

③ H. Okamoto, "Vortices of large scale appearing in the 2D stationary Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers" The Third Oklahoma PDE Workshop, Oklahoma State University, 12/11/2011 米国

④ H. Okamoto, "A Survey on Blow-up

Problems around the Navier-Stokes Equation" International Congress of Industrial and Applied Mathematics, Vancouver, Canada. Mini-workshop 22/07/2011 カナダ

⑤ H. Okamoto, "Blow-up solutions of the Navier-Stokes equations with infinite energy" Recent Developments in Nonlinear Partial Differential Equations: Part II 16/05/2011 香港中文大学 香港

⑥ H. Okamoto, "Blow-up problems in the strained vorticity dynamics and critical Exponents" 2011 Spring Western Section Meeting University of Nevada, Las Vegas, NV 米国. April 30, 2011

⑦ H. Okamoto, "Pattern formations at high Reynolds numbers: Navier-Stokes, Kolmogorov, and ..." 京都大学数理解析研究所研究集会「Far-From-Equilibrium Dynamics」日時: 2011年1月4日

⑧ H. Okamoto, "The vorticity dynamics of incompressible fluid in linear strain: blow-up and a critical exponent" 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up Leiden, オランダ 06/09/2010

⑨ H. Okamoto, "On the Stokes drift" 第3回日中韓数值数学国際会議, 大韓民国江陵市 19/08/2010

⑩ H. Okamoto, "Fluid mechanical paradoxes and their analytical resolutions." PDE and Functional Analysis Research Center, Seoul University, Korea, 25/11/2009 基調講演

⑪ H. Okamoto, "Bifurcation of Kolmogorov flows and large vortices." The 5th East Asia SIAM Conference, University of Brunei, Brunei, 09/06/2009

⑫ H. Okamoto, "Dedicate to Prof. Andrew Majda's 60th birthday" The International Conference on Contemporary Applied Mathematics, Fudan University, Shanghai, China, January 19--13, 2009,

⑬ H. Okamoto, "The inviscid limit of steady-states of the Navier-Stokes

equations” Analytical and Computational Fluid Dynamics 2008. Chung-Ang University, Korea, June 24-25, 2008

⑭ H. Okamoto, “On mathematical issues on discretization of the blow-up problems” Workshop on Foundations of Numerical PDEs City University of Hong Kong, June 20--22, 2008

〔図書〕(計1件)

ナヴィエ・ストークス方程式の数理, 東京大学出版会、2009年 6月

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~okamoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡本 久 (OKAMOTO HISASHI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：40143359

(2) 研究分担者

山田 道夫 (YAMADA MICHIO)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90166736

: