

自己評価報告書

平成 23 年 4 月 12 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2008~2012

課題番号：20244007

研究課題名 (和文) ポテンシャル問題の多面的研究

研究課題名 (英文)

Research on potential problems from various aspects

研究代表者

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：20137889

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ポテンシャル, 調和

1. 研究計画の概要

(1) 古典的ポテンシャル論は調和, 優調和, 劣調和, 多重劣調和関数などの基本関数の定性, 定量的な性質を調べてきた. これらの基本関数に関する問題をポテンシャル問題と捉え, 多様な方向から多面的に研究する.

(2) 具体的にはポテンシャル問題を以下のように分類し, 研究分担者・連携研究者・研究協力者が分担しあって研究を遂行する.

1. 複雑領域におけるポテンシャル問題
2. フラクタルにおけるポテンシャル問題
3. 多様体におけるポテンシャル問題
4. 関数空間におけるポテンシャル問題
5. ポテンシャル問題の応用

2. 研究の進捗状況

(1) 複雑領域におけるポテンシャル問題については Martin 境界の決定を境界 Harnack 原理や Carleson 評価などの方法によって行った. また, 非線形偏微分不等式の解を優調和関数と捉えて, その境界挙動を明らかにした. Dirichlet 問題に関して, 境界関数と解の連続率の関係を明らかにした. 一様領域に対する Beurling の最小値原理を導き, 極小尖細集合の特徴付けを行った.

(2) フラクタルにおけるポテンシャル問題については Sierpinski carpet に不可視集合という概念を導入して, 等角次元上からの評価を与え, spectral 次元以下であることを示した. また, ある種の非対称マルコフ連鎖について, 熱核のガウス型評価と放物型ハルナック不等式を示し, 非対称な一様楕円型 divergence form を, 非対称なマルコフ連鎖で近似する方法を導いた.

(3) 多様体におけるポテンシャル問題については, 特異値を2つ持つ超越整関数の力学系を考察し, ジーゲル円板・遊走領域の形状を明らかにした. Klein 群の不連続領域の複素解析的性質を調べ, 古典的な

Hardy-Littlewood の定理の拡張, Plemelj の定理の一般化を得た.

(4) 関数空間におけるポテンシャル問題については, α 放物型関数のなす Bergman 空間や, 変動指数をもつ関数空間への拡張を行い, 非線形偏微分方程式の解の存在性に応用し, 放物型 Bergman 空間における Toeplitz 作用素が Schatten 族に属するための必要かつ十分条件をラドン測度の平均関数によって与えた.

(5) ポテンシャル問題の応用については, フェイズフィールド法を用いて, 界面の表面張力を考慮した 2 相流体問題の大域弱解構成を行った. また, Allen-Cahn 方程式と非線形粘性を持つ Navier-Stokes 方程式をカップルさせた近似問題を解析した.

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している.

(理由)

(1) 複雑領域やフラクタル, 確率解析, 幾何学的測度論に関連するポテンシャル問題は世界的に急速に発展しており, 本研究の代表者や分担者はリーダーになっている.

(2) 学問研究を具体的に進め, 達成度を確かめ, 世界における位置づけを明らかにするには各種研究集会や国際会議が必要不可欠である. 本研究では国際会議として, ポテンシャル論研究集会(IWPT)や Rolf Nevanlinna Colloquium を催した. それ以外にも研究分担者を中心として国際会議や函数論シンポジウムや函数論サマーセミナー, ポテンシャル論研究集会などを催した.

4. 今後の研究の推進方策

(1) 2011 年夏には東北大学で国際会議を開催予定であった. しかしながら, 東日本大震災のため, 予定通りの開催は困難な模様である. 海外研究者は日本の状況を必要以上に深刻に考えているので, 研究代

表者・分担者は機会を捉えて海外に出向き、正しい認識の普及と、2012年の国際会議の宣伝に努める。具体的には2011年4月下旬にはワシントン大学、6月にはMontrealの国際会議に研究代表者は出かける予定である。

(2) 定期的開催される函数論シンポジウム、函数論サマーセミナー、ポテンシャル論研究集会を本科学研究費からサポートして着実な研究成果を積み重ねると同時に、日本全国の研究者と密接な連絡を取り合う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)
〔雑誌論文〕(計 10 件)

- ① H. Aikawa, Modulus of continuity of the Dirichlet solutions, Bull. London Math. Soc., 42, 857-867, 2010, 査読有
 - ② C. Liu, N. Sato, Y. Tonegawa, On the existence of mean curvature flow with transport term, Interfaces and Free Boundaries, 12, 251-277, 2010, 査読有
 - ③ Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, Proc. Amer. Math. Soc., 138, 4291-4302, 2010, 査読有
 - ④ J. Kigami, Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees, Adv. Math., 225, 2674-2730, 2010, 査読有
 - ⑤ M. Murata, Semismall perturbations, semi-intrinsic ultracontractivity, and integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations, J. Func. Anal., 257, 1799-1827, 2009, 査読有
 - ⑥ H. Shiga, Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups, J. London Math. Soc., 80, 716-728, 2009, 査読有
 - ⑦ M.T. Barlow, R.F. Bass, T. Kumagai, Parabolic, Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps, Math. Z., 261, 297-320, 2009, 査読有
 - ⑧ H. Aikawa, Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate, Math. Scand., 103, 61-76, 2008, 査読有
 - ⑨ H. Aikawa, K. Hirata, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 58(2), 429-445, 2008, 査読有
 - ⑩ K. Hirata, The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations, Math. Ann., 340, 625-645, 2008, 査読有
- 〔学会発表〕(計 9 件)
- ① T. Kumagai, Convergence of mixing times for sequences of simple random walks on graphs, Combinatorics and Analysis in Spatial Probability, Eurandom, 2010年12月13日, Eindhoven, the Netherlands
 - ② H. Shiga, Teichmüller spaces and holomorphic

maps, Teichmüller theory, 2010年12月1日, MFO, Oberwolfach, Germany

- ③ J. Kigami, Quasiconformal modification of metrics on self-similar sets, 1062nd AMS meeting, Analysis, Probability and Mathematical Physics on Fractals, 2010年10月2-3日, Syracuse University, USA
 - ④ H. Aikawa, Boundary Harnack principle and Carleson estimate, 4th International Conference on Stochastic Analysis and Its applications, 2010年8月31日, 関西大学
 - ⑤ 相川 弘明, 複雑領域上のポテンシャル論 — 解析的性質と幾何的性質 —, 日本数学会(特別講演), 2010年3月24日, 慶應義塾大学
 - ⑥ Y. Tonegawa, Existence of weak mean curvature flow with non-smooth forcing term, SIAM conference on Analysis of PDEs, 2009年12月7日, Miami, U.S.A.
 - ⑦ 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動, 日本数学会(特別講演), 2009年9月26日, 大阪大学
 - ⑧ H. Aikawa, John domains and the doubling property of the harmonic measure, Summer School in Conformal Geometry, Potential Theory, and Applications, NUI Maynooth, Ireland, 2009年6月27日
 - ⑨ 相川 弘明, 複雑領域上の正調和関数, 日本数学会(企画特別講演), 2009年3月29日, 東京大学
- 〔図書〕(計 2 件)
- ① J. Kigami, Volume Doubling Measures and Heat Kernel Estimates on Self-Similar Sets, Memoirs of the AMS/199/932, アメリカ数学会, 2009, pp. 94
 - ② 相川 弘明, 複雑領域上のディリクレ問題 — ポテンシャル論の観点から (岩波数学叢書), 岩波書店, 2008, pp.302
- 〔産業財産権〕
- 出願状況 (計 0 件)
 - 取得状況 (計 0 件)
- 〔その他〕なし