

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25年 5月 21日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2008～2012

課題番号：20244007

研究課題名（和文） ポテンシャル問題の多面的研究

研究課題名（英文） Research on potential problems from various aspects

研究代表者

相川 弘明（AIKAWA HIROAKI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：20137889

研究成果の概要（和文）：調和，優調和，劣調和関数などは解析学，幾何学，確率論など多くの分野に現れる重要な関数であり，その性質を調べることをポテンシャル問題という．複雑領域，フラクタル，多様体，関数空間におけるポテンシャル問題を多面的に研究し，関数の深い性質を明らかにした．

研究成果の概要（英文）： Problems on important functions such as (super, sub)harmonic functions appearing in analysis, geometry and probability are referred to as potential problems. We have investigated potential problems from various view points and unveiled deep properties of important functions in connections with nonsmooth domains, fractals, manifolds and functions spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	5,400,000	1,620,000	7,020,000
2009年度	5,400,000	1,620,000	7,020,000
2010年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2011年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2012年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
総計	23,900,000	7,170,000	31,070,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析，ポテンシャル，調和

## 1. 研究開始当初の背景

古典的なポテンシャル論は調和，優調和，劣調和，多重劣調和関数などの基本的な関数の定性，定量的な性質を調べてきた．これらの基本的関数は，解析学，幾何学，確率論，応用数学など多くの分野に現れる重要な関数であり，その深い解析が必要であることが古くから認識されている．また，逆に，実解析，複素解析，関数解析，確率解析などの手法や概念，目的などがポテンシャル論に採り入れられ，ポテンシャル論自体が豊かになってきた．ここから発生してきた問題や関連する問

題をポテンシャル問題と呼び，ポテンシャル問題を多様な方向から多面的に研究していくとするのが，本研究の全体構想であった．

## 2. 研究の目的

古典的なポテンシャル論は調和，優調和，劣調和，多重劣調和関数などの基本関数の定性，定量的な性質を調べてきた．これらの基本関数に関する問題をポテンシャル問題と捉え，多様な方向から多面的に研究し，その背景にある解析的概念を明らかにし，その応用を考えることが本研究の目的である．より具体的

な目標は以下の通りである。楕円型や放物型微分方程式の解の表現定理や Martin 境界の決定, 境界極限値の存在性 (Fatou 型定理) とその接近領域の最良性 (Littlewood 型定理), 自己相似集合に代表されるフラクタル上のポテンシャル問題, 特に一般の距離空間上の resistance form の構成, 複雑系上のディリクレ形式の熱核評価, 放物型作用素の解の性質, 閉集合のポテンシャル論的性質と補集合の双曲計量の性質との関係, Riemann 多様体内の非相対コンパクト領域上の 2 階線形放物型・楕円型偏微分方程式, Klein 群の極限集合の局所連結性, 変動指数をもつソボレフ空間やモーリー空間等の研究, 自由境界値問題へのポテンシャル論的手法の応用など。

### 3. 研究の方法

ポテンシャル問題を以下のように分類し, 研究分担者・連携研究者・研究協力者が分担しあって研究を遂行する。

- (1) 複雑領域におけるポテンシャル問題  
担当: 研究代表者, 研究分担者 平田
- (2) フラクタルにおけるポテンシャル問題  
担当: 研究分担者 木上, 熊谷
- (3) 多様体におけるポテンシャル問題  
担当: 研究分担者 村田, 志賀, 須川, 田所, 片方, 上野
- (4) 関数空間におけるポテンシャル問題  
担当: 研究分担者 下村, 大野, 連携研究者 鈴木
- (5) ポテンシャル問題の応用  
担当: 研究分担者 利根川, 田所, 片方, 上野

具体的な活動は, 各人の日常的な研究をベースにして, 相互訪問, 討論, 国内外研究会出席・主催, 海外研究者によるレビューなどである。ポテンシャル論研究会, 関数論シンポジウム, 関数論サマーセミナーは定期的な活動とし, ポテンシャル論国際研究会 (IWPT) の主催や, 各種国際会議への参加などを総合的に重ねていく。

### 4. 研究成果

- (1) 複雑領域におけるポテンシャル問題.  
Martin 境界の決定を境界 Harnack 原理や Carleson 評価などの方法によって行った。また, 非線形偏微分不等式の解を優調和関数と捉えて, その境界挙動を明らかにした。Dirichlet 問題に関して, 境界関数と解の連続率の関係を明らかにした。一様領域に対する Beurling の最小値原理を導き, 極小尖細集合の特徴付けを行った。古典的な Harnack 不等式を拡張し, 途中で障害物がある場合でも同様の結果が得られる条件を発見した。その応用として対数型の連続率を持つ Hölder 領域に対して, 境界 Harnack 原理を導いた。

方程式を拡張して, 熱方程式の解の除去可能な特異点に関する Hsu や Hui の結果を半線形熱方程式の解へ拡張した。特に, 放物型ポテンシャル論と反復法を交え, 除去可能性と非線形指数の関係を明らかにした。摂動項を持った周期係数 2 階楕円型微分作用素のレベルベントのスペクトルの下端での漸近展開を与えた。

- (2) フラクタルにおけるポテンシャル問題.  
Sierpinski carpet に不可視集合という概念を導入して, 等角次元上からの評価を与え, spectral 次元以下であることを示した。また, ある種の非対称マルコフ連鎖について, 熱核のガウス型評価と放物型ハルナック不等式を示し, 非対称な一様楕円発散形式を, 非対称なマルコフ連鎖で近似する方法を導いた。媒質について確率 1 のレベルで確率過程のスケール極限が反射壁ブラウン運動になることを 2 つのモデルに対して示した: 【モデル 1】半平面や 1/4 平面上の優臨界確率ポンドパーコレーションクラスター上の単純ランダムウォーク。【モデル 2】錐状領域の上に定義された, 係数がランダムで一様楕円発散形式。

- (3) 多様体におけるポテンシャル問題.  
特異値を 2 つ持つ超越整関数の力学系を考察し, ジーゲル円板・遊走領域の形状を明らかにした。Klein 群の不連続領域の複素解析的性質を調べ, 古典的な Hardy-Littlewood の定理の拡張, Plemelj の定理の一般化を得た。ある超楕円曲線の周期行列の直接表示を求めた。錐特異性を持つ双曲計量の存在と一意性や, 具体的な評価を与えた。複素力学系の結果を応用して微分方程式の定性的理論を研究した。Riemann 面の holomorphic family, 無限次元タイヒミュラー空間, 正則運動と擬等角運動の研究多項式歪積写像の複素力学系を明らかにした。単位円板上で正規化された正則関数のベキ変形を考察し, 変形が単葉となるような指数全体の集合の基本的な性質を与えた。

- (4) 関数空間におけるポテンシャル問題.  
 $\alpha$  放物型関数のなす Bergman 空間や, 変動指数をもつ関数空間への拡張を行い, 非線形偏微分方程式の解の存在性に応用し, 放物型 Bergman 空間における Toeplitz 作用素が Schatten 族に属するための必要かつ十分条件をラドン測度の平均関数によって与えた。放物型作用素の作る Bergman 空間上の Toeplitz 作用素が有限階数となる条件や, 変動指数をもつ Morrey 空間, Orlicz 空間, その一般化である Musielak-Orlicz 空間における容量や Sobolev 不等式を与えた。

- (5) ポテンシャル問題の応用。

フェイズフィールド法を用いて、界面の表面張力を考慮した2相流体問題の大域弱解構成を行った。また、Allen-Cahn方程式と非線形粘性を持つNavier-Stokes方程式をカップルさせた近似問題を解析した。k次元曲面族が平均曲率流であるとは、速度が平均曲率に等しいときであるが、その高さが小さいときには内部正則に関するノルム評価ができることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 78 件)

- ① H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, *J. Anal. Math.* 掲載決定.
- ② K. Ueno, Fiberwise Green functions of skew products semiconjugate to some polynomial products on  $\mathbb{C}^2$ , *Kodai Math. J.* 35, 2012, 345-357, 10.2996/kmj/1341401055
- ③ M. Beck, Y. Jiang, S. Mitra and H. Shiga, Extending holomorphic motions and monodromy, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 37, 2012, 53-67, 10.5186/aasfm.2012.3713
- ④ M. Murata, Nonnegative solutions of the heat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds and semismall perturbations, *Rev. Mat. Iberoam.* 27, 2011, 885-907, 10.4171/RMI/656
- ⑤ K. Hirata, Boundary behavior of superharmonic functions satisfying nonlinear inequalities in uniform domains, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363, 2011, 4007-4025, 10.1090/S0002-9947-2011-05071-3
- ⑥ Z-Q, Chen, P. Kim, T. Kumagai, Global Heat Kernel Estimates for Symmetric Jump Processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* 363, 2011, 5021-5055, 10.1090/S0002-9947-2011-05408-5
- ⑦ H. Aikawa, Modulus of continuity of the Dirichlet solutions, *Bull. London Math. Soc.*, 42, 857-867, 2010, 10.1112/blms/bdq040
- ⑧ C. Liu, N. Sato, Y. Tonegawa, On the existence of mean curvature flow with transport term, *Interfaces and Free Boundaries*, 12, 251-277, 2010, 10.4171/IFB/234
- ⑨ Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138, 4291-4302, 2010, 10.1090/S0002-9939-2010-10510-5
- ⑩ J. Kigami, Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees, *Adv. Math.*, 225, 2674-2730, 2010, 10.1016/j.aim.2010.04.029
- ⑪ M. Murata, Semismall perturbations, semi-intrinsic ultracontractivity, and integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations, *J. Func. Anal.*, 257, 1799-1827, 2009, 10.1016/j.jfa.2009.05.028
- ⑫ H. Shiga, Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups, *J. London Math. Soc.*, 80, 716-728, 2009, 10.1112/jlms/jdp052
- ⑬ M.T. Barlow, R.F. Bass, T. Kumagai, Parabolic, Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps, *Math. Z.*, 261, 297-320, 2009, 10.1007/s00209-008-0326-5
- ⑭ H. Aikawa, Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate, *Math. Scand.*, 103, 61-76, 2008, URL <http://www.msand.dk/article.php?id=3104>
- ⑮ H. Aikawa, K. Hirata, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(2), 429-445, 2008, 10.5802/aif.2357
- ⑯ K. Hirata, The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations, *Math. Ann.*, 340, 625-645, 2008, 10.1007/s00208-007-0163-6

[学会発表] (計 85 件)

- ① H. Aikawa, Intrinsic ultracontractivity and capacitary width, Complex Analysis Seminar, ワシントン大学 (アメリカ), 2013年3月5日
- ② T. Kumagai, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs, 2012Advances on fractals and related topics at CUHK, Chinese University of Hong Kong (中国), 2012年12月11日
- ③ 須川敏幸, シュワルツ微分的一般化 ～不変化と高階化を目指して～, 日本数学会 (特別講演), 九州大学 (福岡市), 2012

- 年 9 月 18 日
- ④ Y. Tadokoro, Nontrivial algebraic cycles in the Jacobian varieties of compact Riemann surfaces, The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis, Kunming University of Science and Technology (中国), 2012 年 7 月 28 日
  - ⑤ H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The 13th Romanian-Finnish Seminar, Ploiești 大学, Romania, 2012 年 6 月 28 日
  - ⑥ J. Kigami, Analysis on Fractals, The Applications of Fractal Geometry & Dynamical Systems, Theory to Biology & Physics, University of California, Riverside(アメリカ), 2012 年 6 月 20 日
  - ⑦ H. Aikawa, Extended Harnack inequality, The 1078<sup>th</sup> AMS meeting, ハワイ大学 (アメリカ), 2012 年 3 月 3 日
  - ⑧ J. Kigami, Dirichlet forms on a noncompact Cantor set and random walk on its defining tree, Foundation of Stochastic Analysis, バンプ国際研究所 (カナダ), 2011 年 9 月 21 日
  - ⑨ Y. Tonegawa, A new proof of Brakke's partial regularity for MCF, Partial Differential Equations, オーベルバッハ研究所 (ドイツ), 2011 年 8 月 11 日
  - ⑩ H. Aikawa, Potential analysis on nonsmooth domains, Complex analysis and potential theory, モントリオール大学 (カナダ), 2011 年 6 月 21 日
  - ⑪ T. Kumagai, Convergence of mixing times for sequences of simple random walks on graphs, Combinatorics and Analysis in Spatial Probability, Eurandom 研究所, Eindhoven (オランダ), 2010 年 12 月 13 日
  - ⑫ H. Shiga, Teichmüller spaces and holomorphic maps, Teichmüller theory, オーベルバッハ研究所 (ドイツ), 2010 年 12 月 1 日
  - ⑬ J. Kigami, Quasiconformal modification of metrics on self-similar sets, 1062nd AMS meeting, Analysis, Probability and Mathematical Physics on Fractals, Syracuse University (アメリカ) 2010 年 10 月 2-3 日,
  - ⑭ H. Aikawa, Boundary Harnack principle and Carleson estimate, 4th International Conference on Stochastic

- Analysis and Its applications, 関西大学, 2010 年 8 月 31 日
- ⑮ 相川 弘明, 複雑領域上のポテンシャル論 — 解析的性質と幾何的性質 —, 日本数学会(特別講演), 慶應義塾大, 2010 年 3 月 24 日
  - ⑯ Y. Tonegawa, Existence of weak mean curvature flow with non-smooth forcing term, SIAM conference on Analysis of PDEs, ホテル Hilton Miami (アメリカ) 2009 年 12 月 7 日,
  - ⑰ 平田賢太郎, 非線形不等式を満たす優調和関数の境界挙動, 日本数学会 (特別講演), 大阪大学, 2009 年 9 月 26 日
  - ⑱ H. Aikawa, John domains and the doubling property of the harmonic measure, Summer School in Conformal Geometry, Potential Theory, and Applications, NUI Maynooth, (アイルランド) 2009 年 6 月 27 日
  - ⑲ 相川 弘明, 複雑領域上の正調和関数, 日本数学会 (企画特別講演), 2009 年 3 月 29 日, 東京大学

[図書] (計 7 件)

- ① J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Memoirs of the AMS/216/1015*, アメリカ数学会, 2012, pp. 132
- ② J. Kigami, Volume Doubling Measures and Heat Kernel Estimates on Self-Similar Sets, *Memoirs of the AMS/199/932*, アメリカ数学会, 2009, pp. 94
- ③ 相川 弘明, 複雑領域上のディリクレ問題 — ポテンシャル論の観点から (岩波数学叢書), 岩波書店, 2008, pp.302

[その他]

研究代表者ホームページ

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~aik/index-j.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：20137889

### (2) 研究分担者

志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)  
東京工業大学・理工学研究所・教授  
研究者番号：10154189

木上 淳 (KIGAMI JUN)  
京都大学・情報学研究科・教授  
研究者番号：90202035

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：80296748

平田 賢太郎 (HIRATA KENTARO)  
秋田大学・教育文化学部・准教授  
研究者番号：30399795

上野 康平 (UENO KOHEI)  
鳥羽商船高等専門学校・一般教育・准教授  
研究者番号：10527881  
(H24 研究分担者に追加)

(3) 連携研究者

鈴木 紀明 (SUZUKI NORIAKI)  
名城大学・理工学部・教授  
研究者番号：50154563

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)  
京都大学・情報学研究科・教授  
研究者番号：90234509  
(H20 研究分担者, H21 より連携研究者)

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号：30235858  
(H20 研究分担者, H21 より連携研究者)

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)  
広島大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号：50294476  
(H20 研究分担者, H21 より連携研究者)

村田 實 (MURATA MINORU)  
東京工業大学・理工学研究科・教授  
研究者番号：50087079  
(H20～21 研究分担者, H22 より連携研究者)

田所 勇樹 (TADOKORO YUKI)  
木更津工業高等専門学校・基礎学系・准教授  
研究者番号：10435414  
(H21 研究分担者追加, H22 より連携研究者)

片方 江 (KATAGATA KOH)  
一関工業高等専門学校・自然科学系・講師  
研究者番号：10529598  
(H22 研究分担者追加, H23 より連携研究者)

大野 貴雄 (OHONO TAKAO)  
大分大学・教育福祉科学部・准教授  
研究者番号：40508511  
(H23 研究分担者追加, H24 より連携研究者)