様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月２３日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2008～2010
課題番号：20310082
研究課題名（和文）連続最適化による混合整数計画問題の大域的解決と情報技術への応用
研究課題名（英文）Global Optimization of Mixed Integer Programming Problems via Continuous Programming and Its Applications to Information Technology

研究代表者
久野　誉人（KUNO TAKAHITO）
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・教授
研究者番号：00205113

研究成果の概要（和文）：情報技術の開発や運用で現れる問題の多くは，混合整数計画問題として数理モデル化できる．ところが，離散変数の数は一般に膨大なため，問題の大域的な解決が図られることはまれで，凸計画問題への近似や精度保証のないヒューリスティクスが広く用いられている．本研究では，情報技術への様々な応用が期待できる混合整数計画を等価な連続最適化問題として再定式化し，その最適解を効率よく生成する大域的最適化アルゴリズムの開発を行った．

研究成果の概要（英文）：Many of problems caused in developing and operating information technology are formulated into mixed integer programming problems. Those problems are rarely solved to optimality, but processed heuristically or approximated into convex programming problems, because the number of discrete variables is enormous in general. In this research, we dealt with mixed integer programming problems which can be applied to information technology, and reformulated them into equivalent continuous optimization problems. We also developed some efficient global optimization algorithms for solving the resulting problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2009 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2010 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
年度			
総　計	7,500,000	2,250,000	9,750,000

研究分野：数理最適化
科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム
キーワード：最適化アルゴリズム，混合整数計画問題，非線形計画問題，大域的最適化

１．研究開始当初の背景

工学や経済，経営に係わるシステムの多くが最適化問題としてモデル化でき，その解に基づいて効率的な設計・運用のできることは古くから知られている．しかし，例えば経営管理における諸問題の定式化が浸透したのは，POS システムなどの情報技術の発達によって顧客データの収集が容易になった 80 年代以降のことに過ぎずない．それが，2000 年以降の Web-2.0 の展開で膨大なデータ収集が可能になるや，サプライチェーンを始めとする大規模システムの精密な定式化まで行われるようになった．このモデル化で得られた最適化問題が首尾よく解決できれば理想的だが，問題はしばしば数十万変数を越え，しかも厄介な離散変数を含む混合整数計画問

題に帰着する．厳密な解決は強力な商用ソルバーにさえ難しく，精度保証のない局所最適化やメタ戦略などのヒューリスティクスに頼らざるをえないのが現状である．これは経営管理に限ったことでなく，データ収集やWeb-2.0 を下支えする情報技術そのものにおいても大同小異で，解決すべき様々な問題が最適化問題にモデル化できるにもかかわらず，問題規模と離散性が障壁となって発見的にしか処理されていない．

混合整数計画問題は 0-1 変数を含む線形不等式系の解を求めることに相当し，0-1 変数を間接的に列挙する離散分枝限定法や分枝カット法が商用ソルバーにはアルゴリズムとして採用されている．この不等式系はまた，0-1 変数条件$x \in \{0,1\}$を等価な有界条件$0 \leq x \leq 1$と非線形条件$x(1-x) \leq 1$に置き換えることで非線形不等式系にも還元でき，凸多面体上で凹関数を最小化する連続最適化問題としての処理も可能である．そのための大域的最適化アルゴリズムに凹性カット法や外部近似法，連続分枝限定法などがあるが，基本設計から半世紀近くを経ても未だ商用ソルバーへの実装は例がない．その主たる理由は，当時の貧弱な計算環境でのパフォーマンスの悪さから「非凸最適化問題は手に負えない」という誤ったパラダイムが定着したからに他ならない．実際には，特殊構造をもつ問題の研究から Konno と Kuno によって始められた綿密な計算実験が，90 年の Horst と Tuy による名著の発行，91 年の専門誌 *Journal of Global Optimization* の創刊を機に一般の非凸最適化問題に対しても実施されるようになり，最新の計算環境のもとで上記のアルゴリズムはいずれも高い実用性をもつことが立証されている．

２．研究の目的

先端の情報技術の開発や運用に現れる諸問題の多くは，離散条件を含む混合整数計画問題として数理モデル化できる．ところが，離散変数は一般に膨大な数にのぼるため，問題の大域的な解決が図られることは稀で，凸計画問題への近似や精度保証のないヒューリスティクスが広く用いられている．本研究の目的は，画像処理や自然言語処理などの情報技術で解決の望まれる大規模な混合整数計画問題を連続最適化問題として再定式化し，その最適解を所与の精度で効率よく生成する大域的最適化アルゴリズムを開発することにある．商用ソルバーの普及とともに離散最適化アルゴリズムの性能向上も著しいが，開発するアルゴリズムとの問題構造によるパフォーマンスの相違を詳細に検証し，離散最適化アルゴリズムとは別の定番となるアルゴリズムを構築することが目標である．

３．研究の方法

本研究では，非線形大域的最適化アルゴリズムに関する理論的研究と，その情報技術への応用を前提とする研究を２つの柱としているが，それぞれの代表的なものについて以下に記述する．

(1) 第１節にも述べた通り，混合整数計画問題は，変数の整数条件を等価な有界条件と非線形条件に置き換えることができる．この非線形条件は，それが満たされないことへの罰金を乗じて目的関数に加えることにより，混合整数計画問題は結局，凹最小化問題に帰着する：

$$\text{(P)}\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{条　件} & \boldsymbol{x} \in D. \end{array}\right.$$

ここでfは凹関数，Dは適当な大きさの行列$\boldsymbol{A}$とベクトル$\boldsymbol{b}$によって

$$D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

と与えられるn次元凸多面体である．この問題(P)を解いたのち，その大域的最適解を元の混合整数計画問題の解に変換すればよい．したがって，凹最小化問題(P)の大域的最適解を効率よく求めるアルゴリズムを構築することが本研究課題で行う作業の中心である．

問題(P)に対する大域的最適化アルゴリズムとして実用性が高いとされるものの筆頭は分枝限定法であるが，このアルゴリズムはさらに錐分枝限定法，単体分枝限定法，矩形分枝限定法の３つに分類される．それぞれ(P)の実行可能領域Dを複数の錐，単体，矩形を使って分割し，分割集合上でfの上下界値を計算，これを繰り返すことで大域的最適解の含まれる領域を絞り込んでいく．ここで効率の鍵となるのは，錐，単体，矩形の分割の仕方であるが，アルゴリズムの収束が保証されるのは，研究の開始当時，２分割とω分割の２種類しか知られていない．例えば単体分枝限定法では，２分割が単体Δの最長辺を半分に切って２つの子単体を生成するのに対し，ω分割は子問題の線形緩和問題：

$$\text{(Q)}\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & g(\boldsymbol{x}) \\ \text{条　件} & \boldsymbol{x} \in D \cap \Delta \end{array}\right.$$

の最適解$\boldsymbol{\omega}$を利用する．問題(Q)は下界値計算を目的とし，gはΔにおけるfの凸包絡関数，つまり下界を与える最小の凸関数で，fが凹関数のときにはアフィン関数となる．したがって(Q)は，単なる線形計画問題である．当然，$\boldsymbol{\omega}$はΔの点なので，$\boldsymbol{\omega}$からΔの端点への辺を定義することで高々$n+1$個の子単体にΔを分割することができる．こうした分割規則を用いた場合のアルゴリズムの収束性は，矩形分枝限定法を除いて 30 年以上も未解決問題となっていたが，2000 年前後に錐分枝限定法，単体分枝限定法に対しても相次いで証明が

発表された．ところが，学術誌に掲載された単体分枝限定法に対する証明は，肝心な部分で未発表のテクニカルペーパーの結果を引用するなど信憑性に疑問の残るものである．そこで，本研究の中でω分割規則を用いた場合の単体分枝限定法の収束性の別証明を与え，それを元により効率がよく，さらに収束性も保証される新たな単体分割規則を提案することとした．

(2) 情報技術の一つであるコンピュータビジョンの重要な分野に多視点幾何がある．そこでは，2000 年前後から様々な問題を以下の分数関数和の最小化問題としてモデル化し，既存の大域的最適化アルゴリズムを応用する試みが行われている：

$$
\text{(R)}\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{q} |(\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{x}+\delta^i)/(\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{x}+\gamma^i)|^p \\ \text{条　件} & \boldsymbol{x}\in D\cap C. \end{array}\right.
$$

ここで，Cはn次元四角形$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{u}\}$を表す．この問題(R)は$p$が１でも，$q$が２以上であれば多極値最適化問題となり，またNP 困難であることも知られている．また，分数は費用対効果を表すことが多いため，(R)には経済や経営の分野で古くから応用があるが，コンピュータビジョンへの応用では，分数の数qは多いものの，問題の次元nが経済や経営で考えられているよりもずっと小さいという特徴がある．ところが，既存のアルゴリズムは経済・経営分野への応用を前提に，次元n が大きくとも，分数関数の数q が比較的小さな問題を効率よく解くように設計されている．つまり，実用性に定評のあるアルゴリズムは分枝限定法をベースとしており，下界値計算こそn次元空間で緩和問題を解いて行うが，メインルーチンである分枝操作は分数の数に対応するq 次元空間で行う．そのため，コンピュータビジョンに現れるようなq の大きな問題には全く歯が立たない．

そこで，この研究課題では従来のアルゴリズムの設計方針とは 180 度異なる発想で，分枝操作をn次元空間で行い，下界値も簡単な線形計画問題を用いて求める方法を探求することにした．コンピュータビジョンに想定される問題の次元nは３から 10 程度であり，既存のアルゴリズムが非線形最適化問題を解いて下界値を計算することを考えれば，この方針で設計したアルゴリズムは，少なくともコンピュータビジョンの分野では高い実用性を示すものと期待された．

４．研究成果

前節に紹介した２つの主要テーマに対して，それぞれ以下のような研究成果を得ることができた．また，これに関連して多目的最適化問題の有効解集合上での最適化の研究や，錐最適化問題，変分不等式などの研究も行い，有望な成果を導くことができた．

(1) 単体分枝限定法は，有限回で終了しなければ，$\Delta^1\supset\Delta^2\supset\cdots\supset\Delta^k\supset\cdots$を満たす単体の列を生成する．それぞれの単体$\Delta^k$上で定義される凸包絡関数$g^k$がベクトル$\boldsymbol{c}^k$とスカラー$c_0^k$とによって次のように与えられるものとする：

$$g^k(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^k\boldsymbol{x}+c_0^k.$$

この$\boldsymbol{c}^k$に対して，

$$\|\boldsymbol{c}^{k_t}\|\le L,\ \ t=1,2,\ldots$$

を満たすkの部分列k_tと定数Lが存在するとき，単体列Δ^kは非退化であるといい，

$$\lim_{k\to+\infty}\inf|g^k(\boldsymbol{\omega}^k)-f(\boldsymbol{\omega}^k)|=0$$

が成り立つ．つまり，このことは定数Lの存在さえ示すことができれば，ω分割を用いた場合の単体分枝限定法の収束を保証できることを意味する．これは，大域的最適化の教科書にも書かれている周知の事実であるが，これまで誰も定数Lの存在を証明することができないでいた．

定数Lの存在を示すため，問題の実行可能領域Dを

$$D(\tau)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le(1+\tau)\boldsymbol{b}\}$$

に緩和し，線形緩和問題を次のように修正した：

$$
\text{(Q')}\quad \left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & g(x)+M\tau \\ \text{条　件} & \boldsymbol{x}\in D(\tau)\cap\Delta,\tau\ge 0. \end{array}\right.
$$

ここでMは，所与の許容誤差$\sigma>0$とfのΔ^1における下界値$F<0$に対して

$$M>-F/\sigma$$

を満たすように与えられた定数である．この修正の結果，(Q')の双対問題の最適解を使って凸包絡関数 gを表すことが可能となり，線形計画法における相補スラック性などから定数Lの存在を明らかにすることができた．問題(Q')の最適解$\boldsymbol{\omega}'$から単体Δを放射状に分割することでアルゴリズムが(P)の大域的最適解へ収束することを示せただけでなく，$\boldsymbol{\omega}'$が含まれるΔの最小フェース上にある任意の点からΔの分割を行ってもアルゴリズムは収束することまで証明できた．

さて，ω分割は一度に最大で$n+1$個もの子問題を生成する．このことは，アルゴリズムを強制終了させてヒューリスティクに利用する場合の大きな弱点である．しかし，上述したように，$\boldsymbol{\omega}'$が含まれるΔの最小フェースの辺上の点で分割してもアルゴリズムが収束することから，最大で２つの子問題しか生成させないことも可能となった．アルゴリズムを(P)の最適解に収束させるには，最小フェースのどの辺のどの点で分割すればよいかを明らかにし，その結果，２分割，ω分割に続く第３の収束分割規則となるω２分割を提案することができた．また，３つの分割規則

に基づくアルゴリズムをワークステーション上に実装して比較実験を行ったところ，ω２分割による単体分枝限定法は２分割を用いた場合よりも遥かに効率がよく，少なくともω分割程度の性能を保持することも明らかになった．

(2) 問題(R)に対して補助変数

$$\boldsymbol{y}_i = \eta_i \boldsymbol{x}, \qquad \eta_i = \frac{1}{\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{x} + \gamma^i}, \qquad i = 1, \dots, q,$$

を導入し，線形分数計画問題における古典的な Charnes-Cooper 変換と同様な変換を施すと，(R)に等価な次の問題が得られる：

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{q} |\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i|^p & \\ \text{条　件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\eta_i \le \boldsymbol{0} & \\ & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i = 1 & \\ & \boldsymbol{y}_i = \eta_i\boldsymbol{x} & \\ & \boldsymbol{y}_i \ge \boldsymbol{0},\ \eta_i \ge 0 & i = 1, \dots, q \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}. & \end{array}$$

そこで，$\boldsymbol{0} \le \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{u}$を満たすベクトル$\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$に対して子問題を考えよう：

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{q} |\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i|^p & \\ \text{条　件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\eta_i \le \boldsymbol{0} & \\ & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i = 1 & \\ & \boldsymbol{y}_i = \eta_i\boldsymbol{x} & \\ & \boldsymbol{y}_i \ge \boldsymbol{0},\ \eta_i \ge 0 & i = 1, \dots, q \\ & \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{t}. & \end{array}$$

この問題の制約条件には変数η_iと$\boldsymbol{x}$との積が含まれ，したがって実行可能領域は凸集合にならない．しかし，以下のように変数$\boldsymbol{x}$を消去して制約条件を書き換えれば，実行可能領域を凸集合にできる：

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{q} |\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i|^p & \\ \text{条　件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\eta_i \le \boldsymbol{0} & \\ & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i = 1 & \\ & \boldsymbol{s}\eta_i \le \boldsymbol{y}_i \le \boldsymbol{t}\eta_i & \\ & \boldsymbol{y}_i \ge \boldsymbol{0},\ \eta_i \ge 0 & i = 1, \dots, q. \end{array}$$

この問題は，もちろん元の子問題に等価とはならないが，子問題の最適値の下界を与えることが証明できる．言い換えれば，分枝限定法の中で下界値計算に用いる緩和問題として利用することができる．しかも，q題の次の形の最適化問題に分解して解くことも可能である：

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & |\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i|^p \\ \text{条　件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\eta_i \le \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i = 1 \\ & \boldsymbol{s}\eta_i \le \boldsymbol{y}_i \le \boldsymbol{t}\eta_i \\ & \boldsymbol{y}_i \ge \boldsymbol{0},\ \eta_i \ge 0. \end{array}$$

この問題は，pの値によって凸最小化となることも凹最小化となることもある．しかし，補助変数として$\zeta_i = |\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i|$を導入すれば，いずれの場合も次の線形計画問題に等価なことがわかる：

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \zeta_i \\ \text{条　件} & -\zeta_i \le \boldsymbol{d}^i\boldsymbol{y}_i + \delta^i\eta_i \le \zeta_i \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{b}\eta_i \le \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i = 1 \\ & \boldsymbol{s}\eta_i \le \boldsymbol{y}_i \le \boldsymbol{t}\eta_i \\ & \boldsymbol{y}_i \ge \boldsymbol{0},\ \eta_i \ge 0,\ \zeta_i \ge 0. \end{array}$$

つまり，子問題の下界値はq個の線形計画問題を解くことで計算できるのである．

最後に，以上の観察をもとに限定操作を行う分枝限定法を構築して 3.0GHz のワークステーション上に実装し，画像数$q/2$の三角測量を想定した次のベンチマーク問題を解いた結果を報告しよう：

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \sum_{i=1}^{q} |(\boldsymbol{d}^i\boldsymbol{x} + \delta^i)/(\boldsymbol{c}^i\boldsymbol{x} + \gamma^i)|^2 & \\ \text{条　件} & \boldsymbol{c}^i\boldsymbol{y}_i + \gamma^i\eta_i \ge 0, & i = 1, \dots, q \\ & 0 \le x_j \le u, & j = 1, 2, 3. \end{array}$$

データはすべて区間$[-0.5, 0.5]$で一様に生成し，各qに対して 10 題を解いた平均が次の表である：

q	600	800	1,000
計算時間(秒)	134.2	212.3	299.3
反復回数	132.2	137.8	137.4

画像数 500 の三角測量は一般に考えられず，このアルゴリズムは三角測量に対して過剰性能ではあるが，1,000 個もの分数関数和の最小化が厳密に行われたことは過去に例がなく，この成果が最適化やコンピュータビジョンの分野に与えるインパクトは極めて大きいはずである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

① Kuno,T.，“Global optimization in computer vision”，数理解析研究所講究録，査読無，Vol.1726，2011，pp.112-122.

② Buckland,P.K.，T.Kuno，and I.Tsushima，“A rectangular branch-and-bound algorithm for solving a monotonic optimization”，数理解析研究所講究録，査読無，Vol.1676，2010，pp.223-229.

③ Kawabe,T.，“Minimax robust RHC method for two mobile robots cooperative carrying task problem”，International Journal of Applied Mathematics and Informatics，査読有，Vol.1，2010，pp.41-49.

④ Kuno,T.，“Linear optimization over

efficient sets”, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1676, 2010, pp.230-237.

⑤ Yoshise,A., Y.Matsukawa, “On optimization over the doubly nonnegative cone”, Proceeding of 2010 IEEE Multi-conference on Systems and Control, 査読有, Vol.1, 2010, pp.41-49.

⑥ 木幡周治, 久野誉人, 徳永隆治, 長野寛, 「ポリゴン情報の最小トライアングルストリップ化」, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1676, 2010, pp.209-222.

⑦ Kuno,T., “On convergence of the simplicial branch-and-bound algorithm”, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1629, 2009, pp.244-253.

⑧ 木幡周治, 久野誉人, 「マルチコア・マルチプロセッサ環境向け分枝限定アルゴリズムの研究」, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1629, 2009, pp.225-233.

⑨ 対馬伊織, 久野誉人, 「多項式記憶量による非線形大域的最適化」, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1629, 2009, pp.194-202.

⑩ 外崎真造, 久野誉人, 「マルチスタート単体法による多峰関数の最適化」, 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol.1629, 2009, pp.142-151.

〔学会発表〕(計３件)

① Kuno,T., and Y.Zheng, “A branch-and-bound algorithm for a class of computer vision problems”, INFORMS 2010 Annual Meeting, December 8, 2010, Austin, USA.

② Anh,P.N., and T.Kuno, “A cutting hyperplane method for generalized monotone nonlipschitzian multivalued variational inequalities”, 4th International Conference on High Performance Scientific Computing, March 6, 2009, Hanoi, Vietnam.

③ Kuno,T., “On Convergence of the simplicial algorithm for convex maximization”, 20th International Symposium on Mathematical Programming, August 26, 2009, Chicago, USA.

〔図書〕(計１件)

① Yoshise,A., Springer-Verlag, “Complementary problems over symmetric cones” in Handbook of Semidefinite, Cone and Polynomial Optimization, 印刷中.

〔その他〕

ホームページ等

http://www.cs.tsukuba.ac.jp/~takahito/

６．研究組織

(1)研究代表者

久野　誉人 (KUNO TAKAHITO)
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・教授
研究者番号：00205113

(2)研究分担者

工藤　博幸 (HIROYUKI KUDO)
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・教授
研究者番号：60221933

山本　幹雄 (YAMAMOTO MIKIO)
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・教授
研究者番号：40210562

河辺　徹 (KAWABE TOORU)
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・准教授
研究者番号：40224844

吉瀬　章子 (YOSHISE AKIKO)
筑波大学・大学院システム情報工学研究科・教授
研究者番号：50234472