

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号： 14301  
研究種目： 基盤研究 (B)  
研究期間： 平成20年度 ~ 平成24年度  
課題番号： 20310088  
研究課題名 (和文) 劣モジュラの構造に基づく離散最適化基礎理論の展開と高速アルゴリズム開発  
研究課題名 (英文) Developments of the Fundamental Theory of Discrete Optimization and Fast Algorithms Based on Submodular Structures  
研究代表者  
藤重 悟 (FUJISHIGE SATORU)  
京都大学・数理解析研究所・特任教授  
研究者番号： 10092321

研究成果の概要 (和文) : 大規模離散最適化問題の有する劣モジュラ的な離散構造に注目し, 効率的なアルゴリズムの構築のために有効な離散構造を研究した. 個別には, ネットワーク・フロー, マッチング, 多品種フロー, 施設配置問題, 資源配分問題, グラフ連結度, 通信網設計, 待ち行列ネットワークに関わる離散構造, 双対貪欲アルゴリズムに関わる離散構造 (双対貪欲多面体, ゾノトープ), ホーン論理関数や安定マッチングの離散凸構造, などであり, 個別の劣モジュラ的な離散構造の解明に基づき, それらの知見を横断的に総合する基礎理論の構築と高速アルゴリズムの開発を行った.

研究成果の概要 (英文) : We have investigated large-scale discrete optimization problems by paying special attention to submodular structures which are effective to devise efficient algorithms. Specifically we have examined discrete optimization problems related to network flows, matchings, multiflows, facility location, resource allocation, graph connectivity, communication network design, and queueing networks, discrete structures arisen in dual greedy algorithms such as dual greedy polyhedra and zonotopes, discrete structures for Horn functions and stable matching problems, and so on to establish the fundamental theory and fast algorithms by integrating the knowledge and insights gained on the individual discrete structures.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
平成20年度	3,800,000	1,140,000	4,940,000
平成21年度	3,800,000	1,140,000	4,940,000
平成22年度	2,600,000	780,000	3,380,000
平成23年度	2,900,000	870,000	3,770,000
平成24年度	2,900,000	870,000	3,770,000
総計	16,000,000	4,800,000	20,800,000

研究分野: 複合新領域

科研費の分科・細目: 社会・安全システム科学 ・ 社会システム工学・安全システム

キーワード: OR

## 1. 研究開始当初の背景

大規模離散最適化問題に対して最適解を効率的に見出すアルゴリズムを構築するためには, 問題の持つ本質に迫る基礎理論の構築が必須であり, そのために注目すべき離散

構造としてもっとも有力で一般性のあるものが劣モジュラ的な離散構造である.

我々は, 長年未解決問題であった劣モジュラ関数最小化の組合せの強多項式アルゴリズムの開発に成功し, 劣モジュラ関数最小化

をオラクルとして多くの離散最適化アルゴリズムが提案されてきた。この成果は、これらの多くのアルゴリズムの効率的な実装を可能にしたばかりでなく、新しいアルゴリズムの枠組みをも与えるものである。そのアイデアは、さらに種々の未解決問題解決への糸口を与え、離散最適化の理論と高速アルゴリズム開発の基礎を与えるものとなると期待される。

## 2. 研究の目的

社会システムや産業経済活動などに関係して現れる生産計画、環境計画、最適配送計画、スケジューリング、最適投資等を始めとする多くの重要な問題は、大規模であり離散構造を有するシステムの最適化問題として捉えられる。このような大規模離散最適化問題は、通常、厳密な最適解を効率よく見出すことが困難な(すなわち、実用的な時間内に解くことが困難な)問題となる。

本研究代表者は、このような困難な問題に対する解決の手がかりを与える重要な切り口として、問題の有する劣モジュラ的な構造に注目して長年研究を継続し、2003年のFulkerson Prizeの受賞を始めとして着実な成果を上げてきており、本研究では、研究代表者らのグループの総力を挙げて、劣モジュラ的な離散構造の観点から大規模離散最適化問題の解析の基礎理論の深化・展開とアルゴリズム開発および実用化に向けて取り組み、大規模離散最適化問題の解決に向けた劣モジュラ的な離散構造に関わる最適化基礎理論の構築を目指す。

## 3. 研究の方法

離散最適化問題の効率的アルゴリズム構築のために有用な離散構造の抽出、及び、その離散構造に基づいた高速アルゴリズムの開発に主眼を置き、大規模離散最適化問題の解決に向けた、劣モジュラ的な離散構造に関わる最適化基礎理論の構築を目指す。

具体的な劣モジュラ的な離散構造としては、ネットワーク・フロー(多品種フロー、一般化フロー)、施設配置問題、資源配分問題に関わる離散構造、双対貪欲アルゴリズムに関わる離散構造(双対貪欲多面体、ゾノトープ)、グラフ連結度、通信網設計、待ち行列ネットワーク、安定マッチング問題の離散凸構造、などであり、個別の劣モジュラ的な離散構造の解明に基づき、それらの知見を横断的に総合する基礎理論の構築と高速アルゴリズムの開発を行う。

## 4. 研究成果

各年度毎の研究成果は、以下の通りである。

[平成 20 年度]

1. 線形計画問題に対する新しい解法として LP-Newton 法を提案し、その有効性を計算機実験によって検証し、理論と実用の両面で今後の研究の展開の可能性を吟味した。
2. 一般グラフのマッチングとマトロイドの共通独立集合問題の共通の一般化として、点集合上に2種類のマトロイドが付随する有向グラフにおける独立偶因子問題を考察し、偶因子問題に対する Pap の組合せ的アルゴリズムを拡張するとともに、Edmonds-Gallai 型の分解原理を与えた。
3. グラフの向き付けに関する Nash-Williams の定理に関連する様々な変種を考察した。
4. 連結度要求を満たすソース配置問題の計算複雑度を解析し、無向グラフに対して強 NP 困難であることを示し、種々の条件の下で近似アルゴリズムを導出した。
5. ソース配置問題を一般化したラミナー被覆制約をもつ単調凹関数最小化問題に対して、問題を記述する凹関数の構造と問題の計算複雑度の関係を明らかにした。
6. 離散構造に着目し、高速な乱択近似アルゴリズムの開発を行った。また、待ち行列ネットワークに対して、定常分布の対数分離凹性に着目し、ネットワーク指標の計算に対する効率的な乱択近似アルゴリズムを設計した。
7. 一般化メディアン安定結婚問題に対して、高速な乱択近似アルゴリズム法を設計した。
8. 品種グラフが  $K_3+K_3$  であるメトリック詰込み問題に対する Karzanov の予想を肯定的に解決した。

[平成 21 年度]

1. グラフ上の点被覆問題を、非劣モジュラ関数を費用関数とする場合に拡張し、劣モジュラ関数の離散凸性を利用して近似比 2 の近似アルゴリズムを設計し、さらに、この手法を一般の集合被覆制約に拡張した。
2. 無向グラフのソース配置問題や外部ネットワーク問題の自然な一般化である、正モジュラシステムにおける最小横断を求める問題を考察し、その問題に現れる極小不足集合族がハイパー木になるという特徴付けを与え、それによって、無向グラフのソース配置問題や外部ネットワーク問題が多項式時間で解けることを示した。
3. 有限分配束上の対数優モジュラ分布に対して、単調なマルコフ連鎖を設計し、完璧サンプリング法を実現した。単調なマルコフ連鎖が設計できるための必要条件が、定常分布が対数優モジュラ分布であることを明らかにした。
4. 端子集合の 2 分割の族に対して、いかなるネットワークにおいても、その 2 分割族に

属する分割について同時にその分割間の最大流となる多品種流が存在するための分割族の特徴付け(multiflow locking theorem)が Karzanov と Lomonosov によって与えられているが、これを、2 分割とは限らない半分族へと拡張した。

5. 双劣モジュラ関数最小化の強多項式時間アルゴリズムを導出した。

6. 有向非巡回的グラフにおける枝素な内向木・外向木対を見出す線形時間アルゴリズムを導出した。

7. パラメトリックな劣モジュラ交わり問題に対するシステム分解の構造理論を構築した。

8. 線形不等式制約を有する離散凸関数最小化の多項式時間アルゴリズムを示した。

[平成 22 年度]

1. 線形計画問題に対する新しい解法として LP-Newton 法を提案し、その有効性を計算機実験によって検証し、理論と実用の両面で今後の研究の展開の可能性を吟味した。

2. 一般グラフのマッチングとマトロイドの共通独立集合問題の共通の一般化として、点集合上に 2 種類のマトロイドが付随する有向グラフにおける独立偶因子問題を考察し、偶因子問題に対する Pap の組合せ的アルゴリズムを拡張するとともに、Edmonds-Gallai 型の分解原理を与えた。

3. 無向グラフのソース配置問題や外部ネットワーク問題の自然な一般化である、正モジュラシステムにおける最小横断を求める問題を考察し、その問題に現れる極小不足集合族がハイパー木になるという特徴付けを与え、それによって、無向グラフのソース配置問題や外部ネットワーク問題が多項式時間で解けることを示した。

4. 劣モジュラ最適化の応用研究として、Schrijver (1978) のポリリンク・システムを用いたフローのモデルを導入した。

5. 充足可能性問題に対する確率的考察などに関連し多項式可解性が予想されていたホーン論理関数の解集合の連結性の問題が coNP 完全であること、またホーン関数が特徴集合で表現されている場合は、多項式時間で解けることを示した。

6. 離散化 Dirichlet 分布に対して、ランダム生成アルゴリズムを構築し、その理論性能を解析した。特に、離散化 Dirichlet 分布は対数分離凹関数ではないため、alternating inequality の概念を導入し、特別な解析を行うことで、性能の理論保証を与えることに成功した。

7. 有向多品種流問題の幾何学的双対性理論を展開し、それに基づいて、今まで知られていた有向多品種流の整数性定理を拡張・分類

し、そしてフラクショナルリティを完全に決定した。

[平成 23 年度]

1. 干渉効果を考慮した無線通信網のモデル化として近年提案された ADT モデルにおける通信容量を計算する問題を抽象化して、ポリリンクシステムを繋げた形のフロー問題の枠組みを提案した。さらに、この枠組みを用いて、ADT モデルにおける通信容量を高速に計算するアルゴリズムを設計した。

2. さらに、ここで提案されたフローモデルは、ポリリンクシステム間をより一般的な繋げ方にしたモデルとして一般化した形で、強力な組合せ最適化モデルである劣モジュラフローモデルと同値であることを明らかにした。

3. 順列に関するオンライン予測について、既存手法が  $O(n^2)$  領域  $O(n^7)$  時間であったのに対し、 $O(n)$  領域  $O(n^2)$  時間のアルゴリズムを与えた。既存手法は数値計算を基にしていたのに対し、提案手法は劣モジュラ多面体に着目した議論に基づいて改良された。特に置換多面体中の点の乱択丸めに関して、時間計算量、領域計算量とも最適なアルゴリズムを設計した。提案手法は理論オーダーの意味で優れるのみならず、計算機実験においても、実装の容易性、計算効率性、解の品質において、先行研究を上回ることが確認された。

4. 最小ノルム点アルゴリズムを用いた、劣モジュラ関数最小化のアルゴリズムが実用的なアルゴリズムであることを計算機実験で確認し、その結果を学術論文として公表すると共に、ソースコードを公開した。

5. 2002年に Hofmeister, Schoning, Schuler, Watanabeによって提案された 3-SAT に対する乱択アルゴリズムを脱乱択化することにより、3-SAT に対して現在最速の  $O(1.3303^n)$  時間アルゴリズムを開発することに成功した。

[平成 24 年度]

1. 多重クラス待ち行列の制御に関連して現れる特殊な劣モジュラ関数の最小化問題に対して、計算幾何学的手法を用いて、劣モジュラ関数最小化の汎用解法よりも遥かに高速なアルゴリズムを設計した。

2. グラフの凸性に注目して、枝素な有向木の根(施設)の配置問題が効率よく解けることを示した。

3. ナップサック問題のロバスト性について考察した。ナップサック問題の最大ロバスト解を擬多項式時間で求められることを示すと同時に、任意の正定数  $d$  に対して、ナップサック問題が  $(\nu+d)$ -ロバスト解をもつかどうかの判定が弱 NP 困難であることを示した。ただし、ただし、 $\nu$  は、対応するナップサックシステムのランク商であり、どんなナップ

サック問題も  $v$ -ロバスト解をもつことが知られている。

4. 安定結婚問題における男女間の公平性の概念の下に考案された一般化メディアン安定マッチングに対し、安定マッチング集合が分配束をなすことを利用して厳密計算の#P完全性を示した。また、分配束上のランダムウォークを用いた素朴な乱択近似アルゴリズムを与える一方で、この問題の近似困難性について、イデアルの一樣ランダム生成を帰着することで示している。

5. 多品種フローの組合せ的対偶理論の展開により Karzanov のフラクショナルリティ問題を一般化して解決した。その他、フローの半整数性と  $1/4$  整数性に関するこれまでの結果を含む統一的理論を展開した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 32 件)

1. H. Hirai, The maximum multiflow problems with bounded fractionality, *Mathematics of Operations Research*, 査読有, 印刷中.  
DOI: 10.1287/moor.2013.600

2. S. Fujishige, A note on polylinking flow networks, *Mathematical Programming, Ser. A*, 査読有, Vol.137, 2013, pp. 601-607.  
DOI: 10.1007/s10107-011-0502-y

3. A. Frank, S. Fujishige, N. Kamiyama, and N. Katoh, Independent arborescences in directed graphs, *Discrete Mathematics*, 査読有, Vol.313, 2013, pp. 453-459.  
DOI: 10.1016/j.disc.2012.11.006

4. S. Boyd, S. Iwata, and K. Takazawa, Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 査読有, Vol.27, 2013, pp. 918-939.  
DOI: 10.1137/110843514

5. S. Iwata and R. Ravi, Approximating max-min weighted T-joins, *Operations Research Letters*, 査読有, Vol.41, 2013, pp. 321-324.  
DOI: 10.1016/j.orl.2013.03.004

6. S. Fujishige and N. Kamiyama, The root location problem for arc-disjoint arborescences, *Discrete Applied Mathematics*, 査読有, Vol.160, 2012, pp. 1964-1970.  
DOI: 10.1016/j.dam.2012.04.013

7. S. Fujishige and Z. Yang, On revealed preference and indivisibilities, *Modern Economy*, 査読有, Vol.3, 2012, pp. 752-758.  
DOI: 10.4236/me.2012.36096

8. S. Fujishige and B. Peis, Lattice polyhedra and submodular flows, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, Vol.29, 2012, pp. 441-451.  
DOI: 10.1007/s13160-012-0084-y

9. M. X. Goemans, S. Iwata, and R. Zenklusen, A flow model based on polylinking systems, *Mathematical Programming*, 査読有, Vol.135, 2012, pp. 1-23.  
DOI: 10.1007/s10107-011-0446-2

10. T. Itoko and S. Iwata, Computational geometric approach to submodular function minimization for multiclass queueing systems, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, Vol.29, 2012, pp. 453-468.  
DOI: 10.1007/s13160-012-0074-0

11. N. Kakimura, K. Makino, and K. Seimi, Computing Knapsack solutions with cardinality robustness, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, Vol.29, 2012, pp. 469-483.  
DOI: 10.1007/s13160-012-0075-z

12. S. Kijima and T. Nemoto, On randomized approximation for finding a level ideal of a poset and the generalized median stable matchings, *Mathematics of Operations Research*, 査読有, Vol.37, 2012, pp. 356-371.  
DOI: 10.1287/moor.1110.0526

13. H. Hirai and S. Koichi: On duality and fractionality of multicommodity flows in directed networks. *Discrete Optimization*, 査読有, Vol.8, 2011, pp. 428-445.  
DOI: 10.1016/disopt.2011.03.001

14. S. Fujishige and S. Isotani, A submodular function minimization algorithm based on the minimum-norm base, *Pacific Journal of Optimization*, 査読有, Vol.7, 2011, pp. 3-17.  
<http://www.ybook.co.jp/online2/pjov7-1.html>

15. S. Yasutake, K. Hatano, S. Kijima, E. Takimoto and M. Takeda, Online linear optimization over permutations, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有, Vol.7074, 2011, pp. 534-543.  
DOI: 10.1007/978-3-642-25591-5\_55

16. S. T. McCormick and S. Fujishige, Strongly polynomial and fully combinatorial algorithms for bisubmodular function minimization, *Mathematical Programming*, 査読有, Vol.122, 2010, pp. 87-120.  
DOI: 10.1007/s10107-008-0242-9
17. T. Matsui, M. Motoki, N. Kamatani, and S. Kijima, Polynomial time approximate or perfect samplers for discretized Dirichlet distribution, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, Vol.27, 2010, pp. 91-123.  
DOI: 10.1007/s13160-010-0002-0
18. H. Hirai, A note on multiflow locking theorem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 査読有, Vol.53, 2010, pp. 149-156.  
[http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e\\_mag/53-2-149-156](http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/53-2-149-156)
19. S. Fujishige, A note on disjoint arborescences, *Combinatorica*, 査読有, Vol. 30, 2010, pp.247-252.  
DOI: 10.1007/s00493-010-2518-y
20. K. Makino, S. Tamaki, and M. Yamamoto, On the Boolean connectivity problem for Horn relations. *Discrete Applied Mathematics*, 査読有, Vol.158, 2010, pp. 2024-2030.  
DOI: 10.1016/j.dam.2010.08.019
21. K. Bérczi, S. Fujishige, and N. Kamiyama, A linear-time algorithm to find a pair of arc-disjoint spanning in-arborescence and out-arborescence in a directed acyclic graph, *Information Processing Letters*, 査読有, Vol.109, 2009, pp.1227-1231.  
DOI: 10.1016/j.ipl.2009.09.004
22. S. Fujishige and K. Nagano, A structure theory for the parametric submodular intersection problem, *Mathematics of Operations Research*, 査読有, Vol.34, 2009, pp.513-521.  
DOI: 10.1287/moor.1090.0395
23. S. Fujishige, T. Hayashi, and K. Nagano, Minimizing continuous extensions of discrete convex functions with linear inequality constraints, *SIAM Journal on Optimization*, 査読有, Vol.20, 2009, pp. 856-867.  
DOI: 10.1137/080717675
24. S. Iwata and K. Nagano, Submodular function minimization under covering constraints, *Proceedings of the 50th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009)*, IEEE, 査読有, 2009, pp.671-680.  
DOI: 10.1109/FOCS.2009.31
25. M. Sakashita, K. Makino, H. Nagamochi, and S. Fujishige, Minimum transversals in posi-modular systems, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 査読有, Vol.23, 2009, pp.858-871.  
DOI: 10.1137/060663970
26. S. Kijima and T. Nemoto, Finding a level ideal of a poset, *Lecture Notes in Computer Science*, 査読有, Vol.5609, 2009, pp.317-327.  
DOI: 10.1007/978-3-642-02882-3\_32
27. S. Fujishige, T. Hayashi, K. Yamashita, and U. Zimmermann, Zonotopes and the LP-Newton method, *Optimization and Engineering*, 査読有, Vol.10, 2009, pp.193-205.  
DOI: 10.1007/s11081-008-9067-x
28. A. Bernath, S. Iwata, T. Kiraly, Z. Kiraly, and Z. Szigeti, Recent results on well-balanced orientation, *Discrete Optimization*, 査読有, Vol.5, 2008, pp.663-676.  
DOI: 10.1016/j.disopt.2008.03.001
29. S. Iwata and K. Takazawa, The independent even factor problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 査読有, Vol.22, 2008, pp.1411-1427.  
DOI: 10.1137/060657066
30. M. Sakashita, K. Makino, and S. Fujishige, Minimum Cost Source Location Problems with Flow Requirements, *Algorithmica*, 査読有, Vol.50, 2008, pp.555-583.  
DOI: 10.1007/s00453-007-9012-y
31. M. Sakashita, K. Makino, and S. Fujishige, Minimizing a monotone concave function with laminar covering constraints, *Discrete Applied Mathematics*, 査読有, Vol.156, 2008, pp.2004-2019.  
DOI: 10.1016/j.dam.2007.04.016
32. S. Kijima and T. Matsui, Randomized approximation scheme and perfect sampler for closed Jackson networks with multiple servers, *Annals of Operations Research*, 査読有, Vol.162, 2008, pp.35-55.  
DOI: 10.1007/s10479-008-0317-2.

[学会発表] (計 13 件)

1. S. Fujishige, Submodularity and discrete convexity, 招待講演, 4th Workshop on Discrete Optimization in Machine Learning (DISCML), NIPS2012, Lake Tahoe, Nevada (US), December 7, 2012.
2. H. Hirai, Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, 招待講演, Workshop on Discrete Geometric Analysis, Kyoto, August 27-31, 2012.
3. N. Kakimura, K. Makino, and K. Seimi, Computing Knapsack solutions with cardinality robustness, 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP), TU Berlin (Germany), August 19-24, 2012.
4. S. Kijima, Efficient randomized rounding in permutahedron, 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2012), TU Berlin (Germany), August 19-24, 2012.
5. S. Iwata and N. Kakimura, Pfaffian orientation, symmetric matrices, and linear programming, 招待講演, Conference on Graph Theory, Georgia Tech., Atlanta (US), May 7-11, 2012.
6. S. Fujishige and J. Maßberg, Dual consistency of systems of linear inequalities and cardinality constrained polytopes, 招待講演, Workshop on Modern Aspect of Submodularity, Georgia Tech., Atlanta (US), March 19-23, 2012.
7. S. Iwata, Submodular optimization and approximation algorithms, 招待講演, The Fifth Sino-Japanese Optimization Meeting, 北京 (中国) 2011年9月26日-29日.
8. S. Boyd, S. Iwata, and K. Takazawa, Finding 2-factors covering 3- and 4-edge cuts in bridgeless cubic graph. Joint Mathematics Meetings, New Orleans (US), January 7, 2011.
9. S. Iwata, Submodular functions: optimization and approximation, 招待講演, ICM, Hyderabad (India), 2010年8月19日-27日.
10. E. Boros, K. M. Elbassioni, V. Gurvich, and K. Makino, A pumping algorithm for ergodic stochastic mean payoff games with perfect information. IPCO 2010, Lausanne (Switzerland) June 9-11, 2010.
11. R. Nakatsubo, S. Kijima, T. Matsui, Computational experiments on perfect

sampling of contingency tables, The 3rd Annual Meeting of the Asian Association for Algorithms and Computation (AAAC 2010), Pohang (Korea), April 17-19, 2010.

12. S. Iwata and J. Orlin, A simple combinatorial algorithm for submodular function minimization, The 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New York (US), 2009年1月4日-6日.

13. S. Fujishige, A submodular function minimization algorithm based on the minimum-norm base, 招待講演, Fourth Sino-Japanese Optimization Meeting, 台南 (台湾), 2008年8月27日-31日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

藤重 悟 (FUJISHIGE SATORU)  
 京都大学・数理解析研究所・特任教授  
 研究者番号: 10092321

### (2) 研究分担者

岩田 覚 (IWATA SATORU)  
 東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授  
 研究者番号: 00263161

### (3) 研究分担者

牧野 和久 (MAKINO KAZUHISA)  
 京都大学・数理解析研究所・准教授  
 研究者番号: 60294162

### (4) 研究分担者

来嶋 秀治 (KIJIMA SHUJI)  
 九州大学・システム情報科学研究院・准教授  
 研究者番号: 70452307

### (5) 研究分担者

平井 広志 (HIRAI HIROSHI)  
 東京大学・大学院情報理工学系研究科・講師  
 研究者番号: 20378962