

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 1 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20340002

研究課題名（和文） K3 曲面および関連する代数多様体の総合的研究

研究課題名（英文） K3 surfaces and related algebraic varieties

研究代表者

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10235616

研究成果の概要（和文）：

格子に関する種々の計算機プログラムを書き、K3 曲面および関連する代数多様体の代数的サイクルのなす格子に適用することで、多くの幾何学的帰結を得た。特に、単純特異点のみを持つ 6 次平面曲線のザリスキペアに関して、Z-分裂曲線という概念を用いて系譜関係まで込めて完全に分類した。また、複素代数曲面上の曲線のなす格子が位相的サイクルのなす格子の中で原始的であるか否かを判定するアルゴリズムを提出した。

研究成果の概要（英文）：

By writing various computer programs for the computational research of lattices and applying them to lattices of algebraic cycles on K3 surfaces (or related algebraic varieties), we obtained many geometric consequences. In particular, we classified the Zariski pairs of simple plane curves of degree 6 by introducing a notion of Z-splitting curves, and described their adjacency relations. We also presented an algorithm to determine the primitivity of a lattice of algebraic curves in the lattice of topological cycles for a given complex algebraic surface.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|------------|-----------|------------|
| 2008 年度 | 3,200,000 | 960,000 | 4,160,000 |
| 2009 年度 | 2,600,000 | 780,000 | 3,380,000 |
| 2010 年度 | 3,800,000 | 1,140,000 | 4,940,000 |
| 2011 年度 | 2,600,000 | 780,000 | 3,380,000 |
| 年度 | | | |
| 総計 | 12,200,000 | 3,660,000 | 15,860,000 |

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：K3 曲面，ネロン・セヴェリ格子，超越格子，6 次曲線

1. 研究開始当初の背景

K3 曲面は、それ自体の重要性に加えて、代数幾何学における多くの一般論の格好の試金石ともなっている。複素数体上の K3 曲面

に対してはトレリ型の定理があり、また、超特異 K3 曲面に対してはネロン・セヴェリ格子の構造が決定されている。これらの結果により、K3 曲面の幾何学の問題の多くが格子に関する代数的問題に翻訳され、さらにこの

問題に対して解を求めるアルゴリズムが存在することがしばしば有る。しかしながら、計算量の膨大さから、すべての場合に適用できる方法は回避され、特殊な K3 曲面に対し特別な方法を用いておこなわれる研究が多かった。また、格子理論による研究の限界として、与えられた性質を持つ K3 曲面の存在や唯一性がわかって、その K3 曲面の定義方程式を明示的に書くことは一般には難しいということがある。K3 曲面の数論的性質や平面 6 次曲線の位相幾何学を調べる上で、このことは障害となる。

2. 研究の目的

計算機によるアプローチの最大の利点は、問題の本質が計算量の膨大さによって見失われることがないという点にある。また、より汎用的なアルゴリズムを書こうとする努力が問題の本質の解明につながる場合がある。そこで、K3 曲面に関する様々な問題に対し、解をあたえるアルゴリズムを開発して、実用に耐える計算機プログラムを書く。さらに、計算機による実行結果から幾何学的帰結を導き、新しい現象を探索する。

3. 研究の方法

- (A) K3 曲面の幾何学的な問題のうち、格子理論的計算に還元できる部分を確定する。
- (B) 還元できる部分に対しては、できるだけ汎用性の高いアルゴリズムによる計算機プログラムを書いて、計算機に実行させる。
- (C) 還元できない部分、とくに射影モデルの具体的な定義方程式を必要とする問題に対しては、グレブナー基底を用いた計算機プログラムを書く。
- (D) さらに、格子理論的データ以外の量（たとえば、クリスタル周期、ブラウアー群など）を計算機で取り扱う手法を開発する。

4. 研究成果

研究代表者の島田伊知朗は以下の研究を行った。

単純特異点のみをもつ平面 6 次曲線の格子理論的分類を完成させた。Z-分裂曲線という概念を用いることで、2 重被覆が非自明な代数曲線をもつ単純 6 次曲線の系列が 4 個あることを示した。超越格子と位相型の関係に関する研究代表者の結果と組み合わせることによりザリスキ対を数多く得た。

Zariski-van Kampen の定理を一般化し、グ

ラスマン双対超曲面の補集合の基本群に対する応用を得た。

Frobenius 超特異性という概念を導入し、有限体上の線形空間とその Frobenius 像の包含関係により定義されるグラスマン多様体の直積の部分多様体として Frobenius 超特異多様体の例を構成し、その単有理性を証明した。さらに代数的サイクルのなす格子を記述した。

4 本の直線にそって分岐する射影曲面の巡回被覆として得られる代数曲面のネロン・セヴェリ格子の構造を、Zariski-van Kampen の方法を用いて詳しく調べた。この研究のために、複素代数曲面上の曲線のなす格子が位相的サイクルのなす格子の中で原始的であるか否かを判定するアルゴリズムを提出した。

標数 5 の超特異 K3 曲面で、Artin 不変量が小さいものの射影モデルについて研究した。その結果、Artin 不変量が 1 および 2 となる次数 2 の射影モデルの方程式を書き下すことができた。

有限体上のエルミート曲線に接する 2 次曲線についての B. Segre の古典的な結果を高次元に拡張した。

分担者の木村俊一は、モチビクゼータの一般化としてモチビク Chow 級数の有理性について研究し、Chow モチーフを係数とすると、モチビクゼータの場合と違って一般には有理的にならないことを示し、さらに A^1 -ホモトピーという関係を入れるとトーリック多様体などの場合に有理的になる、という現象を発見した。

分担者の石井亮は、ダイマー模型の両立性を定義し、それに付随する籐と 3 次元ゴレンスタインアフィントーリック多様体のクレパント解消との導来同値を示し、そのような任意の多様体に対して両立的ダイマー模型が構成できることを示した。2 次元トーリック弱ファンスタックおよび、フェルマー多様体の巡回商スタックが直線束からなる強充満例外列を持つことを示した。Special McKay 対応における導来圏の差が例外列によって埋められることを示した。“Hilb of Hilb”について考察した。

分担者の高橋宣能は、モノイダル圏におけるモチーフ的ゼータ関数の有理性、代数多様体や代数的力学系の弦理論的モチーフの測度とその応用、フェルマー曲面の商の Picard 格子、多変数巾級数の有理性、相対 Gromov-Witten 不変量などに関する研究を行った。

分担者の高橋浩樹は、代数体や Abel 多様体に対する岩澤加群の構造をいくつかの特殊元

を系統的に利用することによって調査した。特に、これらのガロア加群が有限性という性質を持つであろうという Greenberg 予想の成立理由についてデータをもとに議論できるようになった。

分担者の平之内俊郎は、代数体及び関数体に関する種々の数論的な問題の高次元化、特に高次元類体論とその数論幾何学への応用について研究した。また望月哲史氏との共同研究のなかで負の次数に関する代数的 K 理論の研究を行った。

毎年 3 月に、「Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics」というタイトルの研究集会を開催し、特に位相幾何学と代数幾何学の接点にある諸問題（超曲面の補集合の基本群とその特性多様体、Lefschetz 束をもつ 4 次元多様体、など）について議論を行い、新しい問題の発見につとめた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 26 件)

1. Ichiro Shimada, A note on rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety, Designs, Codes and Cryptography, 査読有り, 掲載決定, 2012.
2. Ichiro Shimada, On Frobenius incidence varieties of linear subspaces over finite fields, Finite Fields and Their Applications 18(2012) 337-361, 査読有り.
3. Akira Ishii and Kazushi Ueda, A note on derived categories of Fermat varieties, Proceedings of the conference "Derived Categories Tokyo 2011", EMS series of Congress Reprints, 査読有り, 掲載決定, 2012.
4. Nobuyoshi Takahashi, Nonstandard point counting for algebraic varieties, Communications in Algebra, 査読有り, 掲載決定, 2012.
5. Ken-taro Kimura, Shun-ichi Kumura, and Nobuyoshi Takahashi, Motivic zeta functions in additive monoidal categories, Journal of K-Theory, 査読有り, 掲載決定, 2012.
6. Toshiro Hiranouchi, Milnor K-groups modulo p^n of a complete discrete valuation field, Proc. Japan Acad., Ser. A. 査読有り, 掲載決定, 2012.
7. E. Javier Elizondo and Shun-ichi Kimura, Rationality of Motivic Chow series modulo A^1 -homotopy, Advances in Mathematics, 査読有り, 掲載決定, 2012.
8. Pedro Luis del Angel and Shun-ichi Kimura, Finite dimensional morphisms in a tensor category. J. Reine Angew. Math. 656 (2011), 213-222. 査読有り.
9. Akira Ishii and Kazushi Ueda, A note on consistency conditions on dimer models. Higher dimensional algebraic geometry, 143-164, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B24, 2011, 査読有り.
10. Nobuyoshi Takahashi, Descending chain condition for stringy invariants. Higher dimensional algebraic geometry, 165-178, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B24, 2011, 査読有り.
11. Akira Ishii, Kazushi Ueda and Hokuto Uehara, Stability conditions on An-singularities. J. Differential Geom. 84 (2010), no. 1, 87-126. 査読有り.
12. Toshiro Hiranouchi, Ramification of truncated discrete valuation rings: a survey. Algebraic number theory and related topics 2008, 35-43, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B19, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010, 査読有り.
13. Toshiro Hiranouchi, Class field theory for open curves over p-adic fields. Math. Z. 266 (2010), no. 1, 107-113. 査読有り.
14. Toshiro Hiranouchi and Satoshi Mochizuki, Pure weight perfect modules on divisorial schemes. Deformation spaces, 75-89, Aspects Math., E40, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. 査読有り.
15. Toshiro Hiranouchi and Yuichiro Taguchi, Flat modules and Gröbner bases over truncated discrete valuation rings. Interdiscip. Inform. Sci. 16 (2010), no. 1, 33-37. 査読有り.
16. Ichiro Shimada and Nobuyoshi Takahashi, Primitivity of sublattices generated by classes of curves on an

algebraic surface. Comment. Math. Univ. St. Pauli 59 (2010), no. 2, 77–95. 査読有り.

17. Ichiro Shimada, Lattice Zariski k -ples of plane sextic curves and Z -splitting curves for double plane sextics. Michigan Math. J. 59 (2010), no. 3, 621–665. 査読有り.

18. Ichiro Shimada, Topology of curves on a surface and lattice-theoretic invariants of coverings of the surface. Algebraic geometry in East Asia–Seoul 2008, 361–382, Adv. Stud. Pure Math., 60, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010. 査読有り.

19. Ichiro Shimada, Generalized Zariski–van Kampen theorem and its application to Grassmannian dual varieties. Internat. J. Math. 21 (2010), no. 5, 591–637. 査読有り.

20. Shun-ichi Kimura, Surjectivity of the cycle map for Chow motives. Motives and algebraic cycles, 157–165, Fields Inst. Commun., 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. 査読有り.

21. Shinya Harada and Toshiro Hiranouchi, Smallness of fundamental groups for arithmetic schemes. J. Number Theory 129 (2009), no. 11, 2702–2712. 査読有り.

22. E. Javier Elizondo and Shun-Ichi Kimura, Irrationality of motivic series of Chow varieties. Math. Z. 263 (2009), no. 1, 27–32. 査読有り.

23. Ken-ichiro Arima and Ichiro Shimada, Zariski–van Kampen method and transcendental lattices of certain singular K3 surfaces. Tokyo J. Math. 32 (2009), no. 1, 201–227. 査読有り.

24. Ichiro Shimada, Transcendental lattices and supersingular reduction lattices of a singular K3 surface. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 2, 909–949. 査読有り.

25. Humio Ichimura and Hiroki Sumida-Takahashi, On Hilbert–Speiser type imaginary quadratic fields. Acta Arith. 136 (2009), no. 4, 385–389. 査読有り.

26. Akira Ishii and Kazushi Ueda, On

moduli spaces of quiver representations associated with dimer models. Higher dimensional algebraic varieties and vector bundles, 127–141, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B9, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2008, 査読有り.

[学会発表] (計 45 件)

1. 石井亮, McKay correspondence and dimer models, Mini-workshop of Algebra, 2012年3月21-22日, 国立台湾大学, 台湾

2. 石井亮, On iterated G-Hilbert schemes, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2012.3.16, 九州大学数理学研究院

3. 木村俊一, Rationality and irrationality of motivic series, Workshop on p -adic arithmetic geometry and motives, 23 January, 2012, 東北大学

4. 石井亮, Special McKay correspondence and exceptional collections, Complex Algebraic Geometry, 2011. 9. 26, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany

5. 石井亮, Dimer models and crepant resolutions, Noncommutative Algebraic Geometry and D-branes, 2011年12月13日 Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University, USA

6. 島田伊知朗, 超特異 K3 曲面の次数 2 の射影モデルについて, 代数幾何ワークショップ, 2011.12.8, 東京大学大学院数理科学研究科

7. 木村俊一, Rationality and irrationality of motivic Chow series, O’Sullivan Conference, 2 September, 2011, オーストラリア国立大学, オーストラリア

8. 石井亮, A remark on invertible polynomials and exceptional collections, WORKSHOP ON NON-COMMUTATIVE GEOMETRY AND THE MCKAY CORRESPONDENCE, 2011年3月14日 名古屋大学多元数理学研究科

9. 島田伊知朗, Supersingular K3 surfaces

in characteristic 5, 代数幾何学研究集会-フ
ァノ多様体と正標数上の話題を中心として-,
21 February, 2011, 九州大学伊都キャンパ
ス数理学研究教育棟

10. 島田伊知朗, 標数 5 における超特異 K3
曲面, 日本数学会中四国支部, 29 January,
2011, 鳴門地場産業振興センター

11. 島田伊知朗, Supersingular K3 surfaces
and lattice theory, Arithmetic and
Algebraic Geometry 2011, 21 January,
2011, University of Tokyo,

12. 平之内俊郎, On the image of the cycle
map for the product of elliptic curves over a
p-adic field, Industrious number theory 3,
Korea Institute for Advanced Study, Seoul
(Korea), 12 Nov. 2010.

13. 島田伊知朗, 超特異代数多様体について,
日本数学会, 2010.9.24, 名古屋大学

14. 島田伊知朗, 小さい標数における超特異
K3 曲面の構成, 玉原特殊多様体研究集会,
2010.9.8, 玉原国際セミナーハウス

15. 石井亮, Special McKay correspondence and
universal localisation, Geometry and algebra of
orbifolds and the McKay correspondence,
2010.8.12 Warwick Univ., U.K.

16. 島田伊知朗, 小さい標数における超特異
K3 曲面について, 代数幾何研究集会 2010,
17 July, 2010, 法政大学小金井キャンパス

17. 島田伊知朗, Lattices of algebraic cycles
in positive characteristics, 5th Pacific Rim
Conference on Mathematics, 2 July, 2010,
Stanford University, USA

18. 石井亮, Dimer models and exceptional
collections, DMM seminar, 2010 年 4 月 26
日 東京大学 IPMU

19. 島田伊知朗, Lattices of algebraic cycles
on varieties of Fermat type (joint work
with Nobuyoshi Takahashi), Algebraic
Geometry in Characteristic p and Related
Topics, 19 February, 2010, University of
Tokyo

20. 島田伊知朗, On lattice-invariants of
complex algebraic surfaces and their

applications slides, Symposium in
algebraic geometry, 28 December, 2009,
Busan, Korea

21. 石井亮, Dimer models and exceptional
collections, Mirror Symmetry and
Gromov-Witten Invariants, 2009 年 12 月 7
日, 東京大学数理科学研究科

22. 高橋宣能, Descending chain condition
for stringy invariants, 高次元代数幾何の周
辺, 2009.12.16, 京都大学 理学部

23. 島田伊知朗, 超特異 K3 曲面と格子理論,
代数学と計算, 2009. 12.4, 首都大学東京

24. 島田伊知朗, Transcendental lattices of
complex algebraic surfaces, Tohoku-Fudan
joint symposium on algebraic geometry,
25 November, 2009, Tohoku University

25. 島田伊知朗, Transcendental lattices of
surfaces, Workshop "Category Theory,
Computer Science and Topology",
18 October, 2009, 信州大学

26. 石井亮, Dimer models and tilting
bundles, Complex Algebraic Geometry,
2009 年 10 月 1 日, Mathematisches
Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany

27. 島田伊知朗, Remarks on Zariski pairs
of surfaces in the projective space, Seminar
Talk, 24 September, 2009, Fudan
University, ShangHai, China

28. 島田伊知朗, Zariski pairs of normal
surfaces in P^3 , The 5th Franco-Japanese
Symposium on Singularities, 27 August,
2009, IRMA, Strasbourg, France

29. 島田伊知朗, On lattice-theoretic
invariants of curves on a surface, The 2nd
MSJ-SI Arrangements of Hyperplanes,
2009.8.12, Hokkaido University, Sapporo

30. 高橋宣能, 相対 Gromov-Witten 不変量,
代数幾何学サマースクール 2009, 2009.7.28,
東京大学玉原国際セミナーハウス

31. 石井亮, Dimer models and the special
McKay correspondence, Algebraic

Triangulated Categories and Related Topics, 2009年7月24日, RIMS (京都大学)

32. 島田伊知朗, Zariski pairs and lattice theory, Antalya Algebra Days XI, 24 May, 2009, Antalya, Turk

33. 島田伊知朗, Zariski pairs and lattice theory, General Seminar, 18 May, 2009, Bilkent University, Ankara, Turk

34. 島田伊知朗, Splitting curves for the double covering branching along a plane curve of degree 6, 第4回代数・解析・幾何学セミナー, 18 February, 2009, 鹿児島大学

35. 島田伊知朗, Splitting curves for the double covering branching along a plane curve of degree 6, II and III, 特異点セミナー, 23 January, 2009, 東京理科大学

36. 島田伊知朗, On equisingular families of plane curves of degree 6, Arithmetic and Algebraic Geometry Related to Moduli Spaces, 2009.1.19, University of Tokyo

[その他]

ホームページ等

http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~s_himada/K3.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10235616

(2) 研究分担者

木村 俊一 (KIMURA SHUN-ICHI)

広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10284150

石井 亮 (ISHII AKIRA)

広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10252420

高橋 宣能 (TAKAHASHI NOBUYOSHI)

広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60301298

高橋 浩樹 (TAKAHASHI HIROKI)

広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90291476

隅広 秀康 (SUMIHIRO HIDEYASU)

広島大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60068129

平之内 俊郎 (HIRANOUCI TOSHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：30532551

(3) 連携研究者

松本 眞 (MATSUMOTO MAKOTO)

東京大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号：76231602
(H20～H21 研究分担者)

伊藤浩行 (ITO HIROYUKI)

東京理科大学・理工学部
研究者番号：60232469
(H20～H22 研究分担者)

齋藤 睦 (MUTSUMI SAITO)

北海道大学大学院理学研究科・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70215565

岡 睦雄 (OKA MUTSUO)

東京理科大学・理学部
研究者番号：40011697

金銅 誠之 (KONDO SHIGEYUKI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
研究者番号：50186847

松本 圭司 (MATSUMOTO KEIJI)

北海道大学大学院理学研究科・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30229546

寺尾 宏明 (TERAO HIROAKI)

北海道大学大学院理学研究科・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90119058

石川 剛郎 (GOO ISHIKAWA)

北海道大学大学院理学研究科・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50176161