

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 2 5 年 8 月 2 6 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008 ~ 2012

課題番号：20340003

研究課題名（和文）

多重ゼータ関数の解析的構造と数論的性質

研究課題名（英文）

Analytic structures and arithmetic properties of multiple
zeta-functions

研究代表者

松本 耕二 (MATSUMOTO KOHJI)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60192754

研究成果の概要（和文）：

研究成果の概要(和文):ルート系に付随して定義される多重ゼータ関数の解析的な振る舞いや、Weyl 群の作用と特殊値との関係、関数関係式などのテーマについて研究し、種々の新しい公式を導いた。特に G 型 2 次元のルート系の場合のゼータ関数の関数関係式やいわゆる **parity result**, C 型ルート系のゼータの視点からの **Euler-Zagier** 和の関係式、またより一般に Lie 群に付随するゼータ関数の諸性質などが得られた。

研究成果の概要（英文）：

We studied analytic properties, special values and their relations with actions of Weyl groups, and functional relations for multiple zeta-functions associated with root systems. We proved several new formulas. In particular, we obtained functional relations and parity results for the zeta-function of the root system of type G_2, new relations for Euler-Zagier sums from the viewpoint of root systems of type C, and various properties of more general zeta-functions associated with Lie groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2009 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2010 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2011 年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2012 年度	3,300,000	990,000	4,290,000
総計	14,800,000	4,440,000	19,240,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学、代数学

キーワード： 数論

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の背景 ルート系のゼータ関数の概念は、研究代表者らが導入したばかりの新しいタイプの多重ゼータ関数であり、研究開始当初はその基本的な諸性質の研究もほとんどなされていなかった。従ってまずはルート系のゼータ関数の理論の基礎工事が喫緊の課題であった。

2. 研究の目的

上述の背景からも察せられるように、ルート系のゼータ関数の理論の基本的な部分の整備が目標であった。

3. 研究の方法

本研究には解析的整数論、保型形式論、表現論、ルート系の理論、あるいは数理論理学など多方面の専門家がそろっており、種々の観点を融合させることで、ルート系のゼータ関数の理論のさまざまな側面の基礎理論を構築することを目指した。

4. 研究成果

主要な成果としては、まず Mellin-Barnes 型積分表示を行ない、それによってルート系のゼータ関数たちの間の帰納的構造を解明したことである。これによって解析接続などの解析的な性質を帰納的に証明することが可能になっただけでなく、その帰納的構造を Dynkin 図形などのルート系の言葉で把握することにより、理論の見通しを明解なものにできた。

またルート系の理論において本質的に重要な役割を果たすのが Weyl 群である。ルート系のゼータ関数はもともと、Witten のゼータ関数の明示的な多変数化、として導入されたものだが、Weyl 群の作用に対する対称性に注目することで、量子ゲージ理論における Witten の体積公式の根元的な成立理由を明らかにすることができた。特に、Witten の公式の数値係数部分を完全に決定するアルゴリズムを与えたが、結局その係数は、ある種の一般化された

Bernoulli 数によって記述できる。このルート系に付随する Bernoulli 数、さらには Bernoulli 多項式の理論は、それ自体新しく、今後の発展が期待できる興味深い対象である。

またそのルート系の Bernoulli 数を指標でひねった意味での一般化も可能であって、この方向はルート系のゼータ関数の分子に指標をのせた、ルート系の L 関数の理論への道を拓くことになる。乗法的指標をのせれば Dirichlet L 関数のルート系的な一般化となり、また加法的な指標をのせたものは本質的にポリログと結びつくので、どちらの方向も重要である。この方向でも我々はすでに一定の成果を得ている。

個々の具体的なルート系を与えると、それに付随するゼータ関数は具体的に決まるので、その特殊値や関数関係式などの個別の理論を展開することができる。実際の計算は階数が小さい場合でなければなかなか実行は困難であるが、我々は階数 3 以下の場合についてはかなり具体的な計算も実行して多くの特殊例などを提示した。特に G 型 2 次元のケースについては詳細な理論を建設することに成功したが、その特殊値について、(偶数点での値は Weyl 群に関する対称性から比較的容易に明示的な公式が出せるが、それのみならず) 奇数点での値も具体的に完全に決定できる場合がある。なぜそのようなことが可能になるのか、ということもルート系の一般論の立場から、Weyl 群の特殊な元に着目することにより、ある程度の理由付けを与えることができています。

さらにルート系のゼータ関数という広い枠組みから、その特殊な場合としての Euler-Zagier 型の多重和を眺めることにより、Euler-Zagier 和だけをみていたのでは気づき得なかった新しい視点や結果が次々と得られている。Euler-Zagier 和の特殊値に関する二重シャッフル関係式は、Drinfeld 積分によって代数的枠組みに問題を言い換え、代数的な操作によって証明していたものだが、Euler-Zagier 和を A 型ルート系のゼータ関数の特殊な場合と見ると、ルート系のゼータ関数の初等的な部分分数分解による変形だけで二重シャッフル関係式の証明ができてしまう。また、Euler-Zagier 和は C 型のルート系のゼ

ータ関数の、長さが等しいルートに対応する変数だけを残した場合、と捉えることもでき、この視点からも新しい結果をいくつか見いだしている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1) K.Matsumoto and H.Tsumura, A new method of producing functional relations among multiple zeta-functions, Quart. J. Math. 59 (2008), 55-83. (査読あり)

2) Y.Komori, K.Matsumoto and H.Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems, Proc. London Math. Soc. 100 (2010), 303-347. (査読あり)

3) Y.Komoro, K.Matsumoto and H.Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II, J. Math. Soc. Japan 62 (2010), 355-394. (査読あり)

4) Y.Komori, K.Matsumoto and H.Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras IV, Glasgow Math. J. 53 (2011), 185-206. (査読あり)

5) Y.Komori, K.Matsumoto and H.Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, Math. Z. 268 (2011), 993-1011. (査読あり)

6) Y.Komori, K.Matsumoto and H.Tsumura, Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, Intern. J. Number Theory 7 (2011), 1441-1461. (査読あり)

7) Y.Komori, K.Matsumoto and H.Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III, in "Multiple Dirichlet Series, L-functions and Automorphic Forms", D.Bump et al. (eds.), Progress in Math. Vol.300, Birkhauser, 2012, pp.223-286. (査読あり)

[学会発表] (計 6 件)

1) K.Matsumoto, Multiple zeta-functions of root systems, Conference on Multiple Dirichlet Series and Applications to Automorphic Forms, August 6, 2008, Univ. Edinburgh, Great Britain

2) K.Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, Dec 17, 2008, Oberseminar, Univ. Heidelberg, Germany

3) K.Matsumoto, Functional equations for double zeta and L-functions, French-Japanese Workshop on Zeta-functions, Nov 23, 2009, Univ.

Saint-Etienne, France

4) K.Matsumoto, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, Special Lectures on Number Theory, June 8, 2010, POSTECH, Pohang, Korea

5) K.Matsumoto, Vektorwertige mehrfache Zeta-Funktionen und die vektorielle Summenformel, Oberseminar Zahlentheorie, Sept 14, 2011, Univ. Wuerzburg, Germany

6) K.matsumoto, Zeta-functions of weight lattices of compact connected semisimple Lie groups, KIAS-POSTECH Number Theory Workshop, JUNE 11/12, 2012, POSTECH, Pohang, Korea

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本耕二 (MATSUMOTO KOHJI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授

研究者番号 : 60192754

(2)研究分担者

小森靖 (KOMORI YASUSHI)
立教大学・理学部・准教授
研究者番号：80343200

(3)連携研究者

津村博文 (TSUMURA HIROFUMI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：20310419

金子昌信 (KANEKO MASANOBU)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：70202017

金光滋 (KANEMITSU SHIGERU)
近畿大学・工学部・教授
研究者番号：60117091

江上繁樹 (EGAMI SHIGEKI)
芝浦工業大学・工学部・教授
研究者番号：60168771

落合啓之 (OCHIAI HIROYUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：90214163

大野泰生 (OHNO YASUO)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：70330230

谷川好男 (TANIGAWA YOSHIO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号：50109261