

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2012

課題番号：20340005

研究課題名（和文） 高次元双有理幾何の分類に関する諸問題

研究課題名（英文） Various problems related to the classification in higher dimensional birational geometry

研究代表者

森 重文（MORI SHIGEFUMI）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：00093328

研究成果の概要（和文）：

3次元端末的代数多様体の端収縮射のうち、点 z の逆像 F が既約曲線となる端収縮射が研究対象であり、 F の近傍の分類をめざしている。フリップ収縮射、因子収縮射、 Q コニック束の3種類あり、フリップ収縮射については解決済みであったが、残り2種についても研究できることを発見した。非Gorenstein点は高々2点であり、しかも1点の場合には、1つの場合を除き分類を完成し、その例外の場合については執筆中である。川北は F が曲面となる因子収縮射は重み付き爆発であることを示した。また、川ノ上・松木は3次元非特異多様体内の曲面に対して、特異点解消を与える爆発列により有効に改善する不変量を導入した。

研究成果の概要（英文）：

We study extremal contraction morphisms of terminal threefolds such that the inverse image F of a point z is an irreducible curve, and try to classify the neighbourhood of F . They consist of 3 kinds, flipping contractions, divisorial contractions, and Q -conic bundles. Among them, flipping contractions had been classified, and we have found that the rest can be studied. There are at most two non-Gorenstein points, and the one-point case has been classified except for one case, and the treatment of the exceptional case is being written. Kawakita has proved that a divisorial contraction such that F is a surface is a weighted blow up. Kawanoue and Matsuki have introduced an invariant for a singular surface embedded in a smooth threefold which effectively improves in a sequence of blow ups specified by their algorithm which resolves the singularity of the surface.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2009年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2010年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2011年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2012年度	1,800,000	540,000	2,340,000
総計	10,300,000	3,090,000	13,390,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：

- (1) Q コニック束 (2) 因子収縮射 (3) フリップ収縮射 (4) 反標準線形系
(5) Du Val 特異点 (6) 端末特異点 (7) 特異点解消 (8) 極小モデルプログラム

1. 研究開始当初の背景

(1) Birkar-Cascini-Hacon-MacKernan により、標数 0 においては、任意次元の射影多様体に対して、極小モデル理論が実用的な意味で機能することが確立した。大まかに言うと、射影多様体に、双有理的な因子収縮射とフリップを有限回施すことにより、最終的に極小モデルか、森ファイバー空間が得られる。

しかしその一方で、双有理幾何では多くの分類問題は依然として未解決であり、3次元においてさも十分には理解されたとは言えない。例えば、3次元の端収縮射の構造は十分に分類されていない。

(2) X は高々端末特異点しか持たない3次元多様体、射 $f : X \rightarrow S$ は端収縮射、 S は2次元以上とする。 s は S の点、 F は f による s の逆像とし、 f を s の近傍上に制限して射の芽 $f : (X, F) \rightarrow (S, s)$ を研究する。 S の次元 $0, 1, 2$ に応じて、 f は Q ファノ多様体、Q デルペゾ束、Q コニック束という。 S が3次元の時、 f は、因子を潰す時は因子収縮射、潰さない時はフリップ収縮射という。

未解決な問題として、 X の反標準線形系の一般元に関する Reid 一般象予想の解決、芽 f の分類などがある。

以降では F は曲線とする。

① 一般象予想

F が既約曲線で、 f がフリップ収縮射か因子収縮射の場合は Kollar-森 (1992) で解決済み。

F が既約曲線で、 f が Q コニック束の場合は論文⑨に部分的な結果がある。

② 芽 f の分類

F が既約曲線で f がフリップ収縮射の場合は Kollar-森 (1992) で殆ど解決され、Tziolas (2005) の補足で解決済み。

F が既約曲線で、 f が因子収縮射の場合は Kollar-森 (1992) に部分的な結果がある。 f が Q コニック束の場合は論文⑨にも部分的な結果がある。

(3) 特異点解消は約半世紀前の廣中による標数 0 の特異点解消後、正標数については未だに一般次元では未解決である。

2. 研究の目的

主に2次元以上の芽 (S, s) への3次元端収縮射の芽 $f : (X, F) \rightarrow (S, s)$ に対して、一般象予想、さらには、芽 f の分類を目指す。

(1) 一般象予想

F が既約曲線で、芽 f が Q コニック束の場合の解決。

F が可約曲線の場合にも、一般象予想の解決を目指す。経験上、(1)は次の(2)を研究する重要なステップとなることが予想される。

(2) 芽 f の分類

F が既約曲線で、芽 f が Q コニック束の場合の分類を目指す。

F が可約曲線の場合にも、分類も目指す。

(3) 以上ではマイルドな特異点ばかりについて述べたが、川ノ上と松木は、一般の特異点に新しい不変量を導入して分類することにより、正標数の特異点解消に寄与することも目指す。

3. 研究の方法

(1) 双有理的な端収縮射については $H^1(0_X)=0$ や $H^1(K_X)=0$ を解析することにより組合せ論的な条件を導き出し、 F の近傍を座標の貼り合わせにより記述するという、森 (1988) の手法を出発点とする。

(2) 点 s を含む、 S の超曲面切断の f による引き戻し H を記述し、 X を H の1変数変形の全空間として記述するという Kollar-森 (1992) の手法を改良する。

(3) H が正規でない場合でも、Tziolas (2005) による H の変形手法を改良・適用し、 H の1変数変形の全空間として X を再構成する。

(4) 森-Prokhorov (2007) では、Q コニック束の場合には $H^1(0_X)=0$ だが $H^1(K_X) \neq 0$ となることの利用法を発見し、(1) や (2) と組み合わせ、組合せ的な条件を導き出したが、その手法を発展させる。

4. 研究成果

本来の目的とは少し異なるが、 S が曲線の場合に、 F の重複度についての考察が得られた (論文⑥)。

(1) 一般象予想

F が既約曲線の場合に、芽 f が Q コニック束の場合の解決 (論文⑦)。

(2) 芽 f の分類

f が Q コニック束で、 s が S の特異点の場合には、 F が可約の場合も含めて分類に成功した (論文⑧)。

以下では、 f は Q コニック束、因子収縮射とする。

F が既約曲線の時、 X の非 Gorenstein 点は高々 2 点だが、1 点の場合で未解決なのは、(IA), (IC), (IIA), (IIB), (IA v) であった。そのうち、(IA) と (IA v) については論文④で、(IC) と (IIB) については論文①で解決した。残る (IIA) 型については、現在執筆中である。

2 点の場合および F が可約な場合は次期の研究計画の対象である。

(3) 川北は、曲面を 1 点に潰す 3 次元の因子収縮射は重み付き爆発として表示できることを、それまで未解決であった $cD/2$ の場合を解決することによって、確立した (論文③)。

(4) 川ノ上と松木は、川ノ上が正標数での特異点解消を目指して以前導入した不変量の上半連続性を示した (論文⑤)。さらに、3 次元非特異空間内の曲面の特異点解消において、新アルゴリズムの指定する爆発列により有効に改善する不変量を導入することに成功した (論文②)。曲面の埋め込み特異点解消は既知とはいえ、良い挙動を示す不変量の発見は重要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① 森 重文、Y. Prokhorov、Threefold Extremal Contractions of Types (IC) and (IIB)、to appear in the Shokurov Volume of the Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society、査読有、2013 or 2014、accepted、22 pages、<http://arxiv.org/abs/1106.5180>

- ② 川ノ上 帆、松木謙二、Resolution of

singularities of an idealistic filtration in dimension 3 after Benito-Villamayor、100 pages、to appear in the volume dedicated to Prof. Mori's 60-th Birthday in Advanced Studies in Pure Mathematics series、査読有、2013、accepted、<http://arxiv.org/pdf/1205.4556.pdf>

- ③ 川北 真之、Supplement to classification of threefold divisorial contractions、Nagoya Math. J.、査読有、206 巻、2012、67–73
DOI:10.1215/00277630-1548493

- ④ 森 重文、Y. Prokhorov、Threefold extremal contractions of type (IA)、Kyoto J. Math.、査読有、51 巻、2011、393–438
DOI:10.1215/21562261-1214393

- ⑤ 川ノ上 帆、松木 謙二、Toward resolution of singularities over a field of positive characteristic (the idealistic filtration program) Part II. Basic invariants associated to the idealistic filtration and their properties、Publ. Res. Inst. Math. Sci.、査読有、46 巻、2010、359–422
DOI: 10.2977/PRIMS/12

- ⑥ 森 重文、Y. Prokhorov、Multiple fibers of del Pezzo fibrations、Proc. Steklov Inst. Math.、査読有、264 巻、2009、131–145
DOI:10.1134/S0081543809010167

- ⑦ 森 重文、Y. Prokhorov、On Q -conic bundles, III、Publ. Res. Inst. Math. Sci.、査読有、45 巻、2009、787–810
DOI: 10.2977/prims/1249478965

- ⑧ 森 重文、Y. Prokhorov、On Q -conic bundles, II、Publ. Res. Inst. Math. Sci.、査読有、44 巻、2008、955–971
DOI: 10.2977/prims/1216238307

- ⑨ 森 重文、Y. Prokhorov、On Q -conic bundles、Publ. Res. Inst. Math. Sci.、

査読有、44 卷、2008、315-369
DOI: 10.2977/prims/1210167329

[学会発表] (計 10 件)

- ① 森 重文、Three dimensional Q -conic bundles and related topics (joint work with Y. Prokhorov)、International conference “Birational Geometry”、2010 年 12 月 8 日、International Centre for Mathematical Sciences (連合王国)
- ② 森 重文、Three dimensional Q -conic bundles and related topics (joint work with Y. Prokhorov)、International workshop “Workshop on Moduli and Birational Geometry”、2010 年 8 月 5 日、Pohang University of Science and Technology (韓国)
- ③ 森 重文、Three dimensional Q -conic bundles and related topics (joint work with Y. Prokhorov)、Miniconference on MMP and RC、2010 年 5 月 21 日、Princeton University (米国)
- ④ 森 重文、Three dimensional Q -conic bundles and related topics (joint work with Yuri Prokhorov)、複素幾何 2010 (Mabuchi 60)、2010 年 3 月 20 日、大阪大学理学部
- ⑤ 森 重文、Three dimensional Q -conic bundles and related topics、第 2 回 GCOE 若手数学者交流会、2010 年 2 月 22 日、発表場所 京都大学芝蘭会館
- ⑥ 森 重文、On Q -conic bundles and threefold extremal contractions of type IA、Professor Miyaoka’s sixtieth birthday celebration symposium “Invariants in Algebraic Geometry”、2009 年 11 月 9 日、東京大学数理科学研究科
- ⑦ 森 重文、On Q -conic bundles、International conference “Geometry of Algebraic Varieties” dedicated to the memory of Vasily Alexeevich Iskovskikh、2009 年 6 月 29 日、Steklov Mathematical

Institute (ロシア)

- ⑧ 森 重文、 Q -conic bundles and the General Elephant Conjecture、IAS/Park City 数学研究所夏期学校、2008 年 7 月 24 日、パークシティ(米国)
- ⑨ 森 重文、 Q -conic bundles and the General Elephant Conjecture、60Miles conference、2008 年 7 月 16 日、University of College London (連合王国)
- ⑩ 森 重文、 Q -conic bundles and the General Elephant Conjecture、Conference on Arithmetic and Algebraic geometry、2008 年 7 月 3 日、東京大学数理科学研究科

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森 重文 (MORI SHIGEFUMI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00093328

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

向井 茂 (MUKAI SHIGERU)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：80115641

中山 昇 (NAKAYAMA NOBORU)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10189079

川北 真之 (KAWAKITA MASAYUKI)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10378961

川ノ上 帆 (KAWANOUE HIRAKU)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：50467445

並河 良典 (NAMIKAWA YOSHINORI)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：80228080

藤野 修 (FUJINO OSAMU)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：60324711

高木 寛通 (TAKAGI HIROMICHI)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150

早川 貴之 (HAYAKAWA TAKAYUKI)

金沢大学・数物科学系・講師
研究者番号：20198823
隅広 秀康 (SUMIHIRO HIDEYASU)
広島大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：60068129

(4) 研究協力者 (海外)

Prokhorov, Yuri
モスクワ大学・教授
松木 謙二 (MATSUKI KENJI)
パデュー大学・教授