

## 自己評価報告書

平成23年 4月11日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20340009

研究課題名 (和文) 高次の幾何構造に付随する変分問題の研究

研究課題名 (英文) Research on variational problems associated with higher order geometric structures

研究代表者

西川 青季 (NISHIKAWA SEIKI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60004488

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：調和写像, エネルギー汎関数, 複素フィンスラー計量

## 1. 研究計画の概要

本研究の目的は、フィンスラー計量や共形構造など、本質的に高階の接束上で定式化される幾何構造に付随して定義される変分問題を、それぞれの幾何構造が内包する標準接続とその曲率から定義される幾何学的不変量に着目して、多面的かつ総合的に研究することである。

とくに、本研究課題では

- (1) 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への調和写像の存在問題
- (2) 全  $\mathbb{Q}$  曲率汎関数の臨界点の特徴づけ

の問題を中心に研究を進める。

## 2. 研究の進捗状況

問題(1)に関しては、以下の成果を得た。

① 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への写像に対して、コーシー・リーマン作用素を用いて適切なエネルギー汎関数を定義し、その第一変分と第二変分を決定した。

② 上記のエネルギー汎関数の臨界点として調和写像を定義し、その基本的性質を調べた。また、第二変分公式を用いて、リーマン球面から正曲率をもつ弱ケーラー・フィンスラー多様体へのエネルギー最小な調和写像は、正則あるいは反正則写像に限ることを証明した。

③ 上記のエネルギー汎関数は、ディリクレ積分の一般化として定義されるエネルギー汎関数とは一致しないため、汎関数として通常の意味での凸性をもたない。

この難点に対して、このエネルギー汎関数を実表示することにより、値域の複素フィンスラー計量がケーラー条件をみたす場合に、

この二つの汎関数の臨界点は一致することを見出した。これにより、臨界点となる調和写像に対して、通常の方法でアприオリ評価をえることができることが分かった。

④ 閉リーマン面から複素フィンスラー多様体への写像に対して、閉リーマン面上の2次微分が定義される。あたえられた写像が調和写像であるとき、2次微分は正則2次微分となることを証明した。この結果により、正則写像でない調和写像の特異集合(コーシー・リーマン作用素の零点集合)が有限集合となることが導かれる。

問題(2)に関しては、全  $\mathbb{Q}$  曲率の第一変分を決定した。現在、計量の共形変形のもとでの第2変分を決定中である。

また、研究の進展を促進するため、 $\mathbb{Q}$  曲率に関する研究の基礎から最新結果までを概観する研究集会「Workshop on  $\mathbb{Q}$ -curvature in conformal geometry」を開催した。

## 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

(理由) 調和写像の特異集合が有限集合となることの証明が大きな課題であったが、ホップ2次微分を利用して証明することができたため、今後の進展が期待できる。

## 4. 今後の研究の推進方策

全  $\mathbb{Q}$  曲率の第2変分を、まず計量の共形変形の場合に決定し、 $\mathbb{Q}$  曲率が一定となる計量の一意性との関係を調べることを中心課題として、今後の研究を推進する。

## 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Zejun Hu, Seiki Nishikawa and Udo Simon, Critical metrics of the Schouten functional, Journal of Geometry, 査読あり, 98 巻, 2010 年, pp. 91-113
2. Seiki Nishikawa, Harmonic maps of Finsler manifolds, Topics in Differential Geometry, Edutura Academiei Romane, 査読あり, 2008 年, pp. 207-247

[学会発表] (計 12 件)

1. Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan, 2010 年 9 月 5 日, 中国・西北大学
2. Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 5th Pacific Rim Conference on Mathematics, 2010 年 7 月 2 日, 米国・スタンフォード大学
3. Seiki Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, The 44th Symposium on Finsler Geometry, 2009 年 9 月 11 日, 東海大学
4. Seiki Nishikawa, Projective complex curves and projectively flat complex Finsler manifolds, International Conference on Perspectives in Geometric Analysis, 2008 年 10 月 27 日, 中国・北京大学
5. Seiki Nishikawa, Geometry of projective complex curves, Conference on Conformal Geometry; invariant theory and the variational methods, 2008 年 7 月 1 日, 仏国・CNRS ロスコフ生物学研究所

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :

権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]