様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年４月２６日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０３４００１２
研究課題名（和文）　可積分系と保存量と変換の方法による特別な性質をもつ曲面の漸近挙動の研究
研究課題名（英文）　Asymptotic behavior of surfaces with special properties via transformation theory and conserved quantities and integrable systems techniques

研究代表者
W.F ラスマン　（W.F ROSSMAN）
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50284485

研究成果の概要（和文）：
この研究の目標は曲面理論の微分幾何学的性質をもつような離散化をより深く理解することであった。滑らかな曲面理論の場合に様々な数学的な構造があり（特に、isothermic の概念や、Christoffel 変換や Calapso 変換、Darboux 変換、Baecklund 変換）、その滑らかな場合の構造を離散的な場合にも持つような離散化のしかたを調べることであった。

研究成果の概要（英文）：
The purpose of this research was to expand our understanding of discretizations in surface theory, in a way that would preserve the geometric mathematical structure (such as the notion of isothermicity, and various transformations like the Christoffel and Calapso and Darboux and Baecklund transformations) that exists for smooth surfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	3,000,000	900,000	3,900,000
２００９年度	3,200,000	960,000	4,160,000
２０１０年度	3,100,000	930,000	4,030,000
２０１１年度	4,100,000	1,230,000	5,330,000
計	13,400,000	4,020,000	17,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：surface theory, asymptotics of surfaces, discrete differential geometry

１．研究開始当初の背景

離散的な微分幾何学、特に離散的な曲面理論がここ20年間で著しい発展を遂げている。しかし、7年ほど前まではユークリッド空間内の離散的な曲面が主な対象であり、他の空間ではほとんど考えられていなかった。

２．研究の目的

上記のように、ユークリッド空間内の離散的な曲面しか考えられていなかったので、この科研費で研究されたものは、ambient空間（双曲空間、球面空間、ミンコフスキー空間、ド・ジッター空間）の場合にも離散的な曲面を微分幾何学的なアプローチで考えるために、定

義や道具を広げることであった。

３．研究の方法

上記の目標を達成するために、様々な分野の研究者を招集し、共同研究を行った。必要な技術は微分幾何学、曲面理論、可積分系、コンピューータープログラミングなどであった。

４．研究成果

この研究により得られた主な結果は以下の通り。

(1)　Tim Hoffmann氏と佐々木武氏と吉田正章氏の協力を得て、双曲空間内の離散的な平坦曲面の定義を与えた。
その定義に関して、事前に定義された双曲空間内の離散的な平均曲率1を持つ曲面との正しい関係があることを確認した。
そのために、Galvez氏とMartinez氏とMilan氏の変分を用いた。その離散的な平坦曲面のcausticの定義も与えて、そのcausticの性質を調べた。
それ以外に、fundamental quadrilaterialのconcircularityも証明した。この立場で、平坦曲面だけではなく、linear Weingarten曲面も離散化できることを発見した。

(2)　可積分系的な保存量に着目するアプローチにより離散的な平均曲率一定曲面が定義できた。これまでは、ambient空間によっては、そのような曲面は考えられなかったが、保存量を用いることで可能になった。この定義による、ambient空間はユークリッド空間でも球面空間でも双曲空間でも良い。そして、平均曲率Hは任意の実数の定数をとれる。
Fran Burstall氏とUdo Hertrich-Jeromin氏とSusana Santos氏との共同研究で題名「Discrete surfaces of constant mean curvature」なる論文を完成した。その仕事により保存量の有用性と使い方が解明された。

その研究により、双曲空間内の離散的な平坦曲面の研究が発展した。これにより任意の空間形（3次元のユークリッド空間と球面空間と双曲空間）内の任意の一定な平均曲率をもつ離散的な曲面の定義と性質、また変換の性質の理解した。特に、Christoffel変換とCalapso変換とDarboux変換の理解を深めた。
この定義を採用してから、以下の結果を得た：

①離散的な平均曲率一定曲面のクラスより広い、多項式の保存量を持つ曲面のクラス（special surfaces）を定義した。

②離散的なspecial surfaceの法線ベクトルを定義した。

③離散的な平均曲率が一定の回転面の具体的な構成の仕方を発見した。

④離散的なspecial surfaceのDarboux変換はまたspecial surfaceになる。そして、Darboux変換の方で保存量の多項式のorderは高々１しか増えない。Calapso変換の場合、保存量の位数が変わらない。しかし、Darboux変換の場合、order nがn+1に増えるかn-1に減るか、もしくは変わらないのいずれかになることを理解した。Darboux変換において、位数が増えない場合にはBacklund変換になる。

⑤離散的な場合にもBianchi permutability定理が成り立つことを証明した。

⑥法線ベクトルを持つ離散的なisothermic surfaceがあるとき、その法線ベクトルは自然な条件を持つ場合に位数が１か２の保存量が存在することを証明した。したがって、special surfaceになる。位数１の場合に離散的な平均曲率一定曲面になる。

(3)　リー球面幾何学の立場から双曲空間内の滑らかな平坦曲面を研究した。保存量をもつ曲面の研究を続けて、双曲空間内の平坦曲面を考える。この場合にリー球面幾何学も重要な役割を果たした。この研究は、最近行った（Tim Hoffmann氏と佐々木武氏と吉田正章氏との共同研究）双曲空間内の離散的な平坦曲面とlinear Weingarten曲面の研究と関係がある。

Fran Burstall氏とUdo Hertrich-Jeromin氏の協力を得て、リー球面幾何学のアプローチで双曲空間内の平坦曲面を調べるために、曲面のクラスをOmega曲面のすべてに広げたほうが良いことがわかってきた。（リー球面幾何学のアプローチはWeierstrass表現を用いたアプローチより技巧的であるが、代わりにより広い曲面のクラスに当てはめることができる。）そうすると、接続の考え方が使え、またOmega曲面の集合の中から平坦曲面を選ぶために0位の保存量を用いた判定条件が得られた。平均曲率1の曲面を選ぶためにも、linear Weingarten surfaces of Bryant typeを選ぶためにも、それぞれの対応している保存量による判定条件があることを証明した。

さらに、接続と保存量の考え方を用いて、その曲面を離散化する方法が明確になった。その離散化が前に定義された離散的な平均曲率1曲面と整合性があることを確かめた。

(4)　Ambient空間がpositive definiteではない場合にも、離散的な平均曲率一定曲面の定義と結果を調べた。特に、ambient空間がミンコフスキー空間の場合を調べた。
神戸大学の院生の木ノ下祐輔氏の協力を得て、3次元ミンコフスキー空間内の離散的な空間的平均曲率一定曲面の定義を見つけた。
そして、ユークリッド空間内の離散的な平均曲率一定曲面について、1位の保存量によって定義されている離散的なガウス写像が、一般的には、離散的な調和写像にならないことを証明した。

(5)　以下の別に得られた結果もある：

①梅原雅顕氏、山田光太郎氏、國分雅敏氏、S.D. Yang氏、藤森祥一氏との共同研究として、Weierstrass表現の立場から、双曲空間内の平坦曲面とド・ジッター空間の平均曲率一定曲面の特異点と完備性とエンドの漸近挙動についての結果を得た。

②David Brander氏とNicholas Schmitt氏との共同研究として、3次元ミンコフスキー空間内の空間的な平均曲率一定曲面の可積分系的な表現を発見した。その表現を使って、新しい例を得た。

③Martin Guest氏とJoseph Dorfmeister氏との共同研究として、Minkowski空間内の空間的な平均曲率一定曲面とquantum cohomologyの関係を研究した。その結果、その2つの分野を結びつけるような特殊な平均曲率一定曲面を得た。

④國分雅敏氏と梅原氏と山田氏の協力を得て、双曲空間内の三本目の論文を書いた。今回の論文ではpitchという概念を用いて、その曲面のエンドの性質を調べた。エンドが漸近的にcycloidの形になることを証明した。

⑤Magdalena Toda氏の協力を得て、ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面と双曲空間内の平均曲率一定曲面の関係を調べた。その二つの曲面のタイプにはLawson対応が存在するが、DPWの方法で作られている場合には、双曲空間内の曲面がもともとのユークリッド空間内の曲面に対応するのではなく、ユークリッド空間内の曲面の双対曲面に対応することを証明した。

⑥藤森氏の協力を得て、双曲空間内の二つのエンドを持つ平均曲率一定曲面の例を構成した。この例は任意の種数を持つ。また、3次元ド・ジッター空間の場合にも、そのような例を構成した。ド・ジッター空間の場合は、エンドが楕円型にも双曲型にもなり得ることを証明した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

①F. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, <u>W. Rossman</u>,
Lie geometry of flat fronts in hyperbolic space, to appear in Comptes rendus - Mathematique
(online publication complete: 10.1016/j.crma.2010.04.018).査読有り

②S. Fujimori, <u>W. Rossman</u>, M. Umehara, S-D. Yang, K. Yamada,
Spacelike mean curvature 1 surfaces in de Sitter 3-space, Comm. Anal. Geom. 17 (2009), 383-427.査読有り

③M. Kilian, <u>W. Rossman</u>, N. Schmitt,
Delaunay ends of constant mean curvature surfaces, Compositio Math.
144 (2008), 186-220.査読有り

〔学会発表〕（計　２件）

①2009年7月16日，“Discrete isothermic surfaces, and applications to architecture”, Discrete differential geometry miniworkshop, Technical University of Denmark.

②2007年5月1日，“Discrete constant mean curvature surfaces via linear conserved quantities in any space form”, Progress in surface theory meeting, Oberwolfach Institute, Germany.

〔その他〕ホームページ等

http://math.kobe-u.ac.jp/home-j/wayne.html

６．研究組織

(1)研究代表者

W.F ラスマン（W.F ROSSMAN)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０２８４４８５

(2)研究分担者
①野呂　正行 (NORO MASAYUKI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０３３２７５５

②小池　達也 (KOIKE TATSUYA)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：８０３２４５９９