

自己評価報告書

平成23年3月31日現在

機関番号：32612
 研究種目：基盤研究（B）
 研究期間：2008～2011
 課題番号：20340023
 研究課題名（和文） 禁止マイナーによって特徴づけされたグラフに関する研究

研究課題名（英文） Study on graphs characterized by forbidden minors

研究代表者

太田 克弘 (OTA KATSUHIRO)
 慶應義塾大学・理工学部・教授
 研究者番号：40213722

研究分野： 組合せ論, グラフ理論

科研費の分科・細目： 数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード： 組合せ論

1. 研究計画の概要

グラフ理論において、多くの重要なグラフの族、例えば平面グラフやシリーズパラレルグラフなどは、禁止マイナーによって特徴づけされる。アルゴリズム的側面から見ても、与えられたグラフがそのようなグラフの族に属するかどうかは多項式時間で判定できる、という意味において比較的扱いやすいグラフの族と言える。実際、平面グラフをはじめとして、特定の閉曲面に埋め込まれるグラフについての理論は、位相幾何学的グラフ理論の名において、多くの研究がなされている。本研究では、禁止マイナーの観点からは従来あまり研究されていなかった、閉路問題、全域木問題、因子問題に焦点を当て、単純な禁止マイナーによって特徴付けられるグラフの部分構造について解明することを目的とする。

このような研究の新たな方向として、平面グラフで培われてきた理論を、 $K_{3,3}$ をマイナーとしてもたないグラフの理論として、平面性を使わない手法の構築を行う。その上で、 $K_{3,3}$ を一般の完全2部グラフに置き換えることにより、平面グラフの理論の一般化を試みる。また、閉路問題、因子問題においては一般的となっている、禁止部分グラフに関する条件や次数条件を見直すことにより、禁止マイナーに次数条件を組み合わせた条件下での閉路・因子の存在について研究を行う。

2. 研究の進捗状況

まず、平面グラフの概念の拡張として、 $K_{3,t}$ をマイナーとして持たない3連結グラフの全域木に関する研究を行った。このようなグラフの族では、取り除いた頂点数に対して生じる連結成分の個数がある程度抑えられる

という事実は分かっており、その帰結として、最大次数が $t+1$ 以下である全域木の存在は知られている。これに対し、最大次数が t 以下である全域木を持たないグラフで、マイナーに関して極小なグラフの性質を詳細に調べることにより、そのようなグラフは $K_{3,t}$ をマイナーとして持つことがわかった。すなわち、 $K_{3,t}$ をマイナーとして持たない3連結グラフには、最大次数が t 以下の全域木が存在することが示された。さらに、 t が偶数のときには、全域木の最大次数をさらに1だけ下げられることも示された。これらの事実は、次数制約付き全域木に関する結果としては、最善の結果といえる。

禁止マイナーの観点から閉路問題、全域木問題、因子問題を解明するにあたり、まず禁止部分グラフに関する研究の再検討を行った。完全マッチングと禁止部分グラフの関連についてはよく知られている事実がある。それは、クローと呼ばれる4頂点のグラフを誘導部分グラフとして含まない偶数頂点からなる連結グラフは完全マッチングを持つ、という事実である。この研究を極限まで推し進め、完全マッチングの存在を保証するような禁止誘導部分グラフの組み合わせをすべて決定することができた。また、これまで比較的多くの研究がなされているクローフリーグラフやその一般化であるスターフリーグラフについての調査については、いくつかの研究成果が上がっており、順調に進捗しているといえる。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

理由： $K_{3,t}$ をマイナーとして持たない3連結グラフの全域木に関する研究については、全

域木の最大次数を制限するという意味においては、望みうる最善の結果を証明することができた。とくに t の偶奇性によって結論が異なることは、具体例からは予想されていたが、そのような形の命題が証明できたことは驚くべきことで、かなり価値の高い結果と言える。しかし、平面グラフの多くの理論を包括するような理論構築にはまだ至っていない。

禁止マイナーの観点からの閉路問題、因子問題に対するアプローチは、その準備段階として、禁止誘導部分グラフによる完全マッチング存在のための条件をすべて特徴づけることに成功した。これまでの結果では、ごく少数（3個まで）の禁止誘導部分グラフで完全マッチングの存在を保証するものについては決定されていたが、それをすべてのケースで特徴づけできた結果の意義は大きい。

4. 今後の研究の推進方策

$K_{3,t}$ をマイナーとして含まないグラフに関する研究については、最大次数を制限した全域木についての結果をベースとして、最小次数にも制限を加えられないかについて考える。各頂点の次数の上限下限を制限した全域部分グラフは、そのグラフの因子と呼ばれ、因子理論との関連が注目される。禁止マイナーと因子の存在に関する研究にも焦点を当て、因子理論の観点からの研究を行う。加えて、今までに得られている全域木に関する研究結果とあわせて取りまとめを行い、さらなる発展として連結因子の理論に向けた考察を行う。

平面三角形分割の拡張として、 $K_{3,t}$ をマイナーとして含まない辺極大なグラフについての考察、 $K_{3,4}$ をマイナーとして含まない3連結グラフと射影平面など、閉曲面上の3連結グラフとの関連についてはまだそれほど解明されていない部分であるので、解明に向けた知見を得ることを一つの目標とする。

完全グラフをマイナーとして禁止したグラフの大まかな構造は、Robertson&Seymourのグラフマイナー理論の骨格となる部分であるが、これに対し、禁止部分グラフについてはより詳細な構造を決定できる場合がある。この観点から、禁止マイナーと禁止部分グラフの差異についての研究を総まとめとして行う。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

(1) K. Ota, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples for perfect matchings, to appear in J. Graph Theory. 査読あり

(2) K. Ota and T. Sugiyama, Forbidden subgraphs and the existence of spanning k -trees, Discrete Math. 310 (2010), 3506-3511. 査読あり

(3) R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito, Two forbidden subgraphs and the existence of a 2-factor in graphs, Austral. J. Combin. 44 (2009), 235-246. 査読あり

(4) Y. Egawa, J. Fujisawa, S. Fujita and K. Ota, On 2-factors in r -connected $\{K_{1,4}, P_4\}$ -free graphs, Tokyo J. Math. 31 (2008), 415-420. 査読あり

(5) J. Fujisawa, K. Ota, T. Sugiyama and M. Tsugaki, Forbidden subgraphs and the existence of paths and cycles passing through specified vertices, Discrete Math. 308 (2008), 6111-6114. 査読あり

[学会発表] (計 10 件)

(1) G. Sueiro, 太田克弘, 小関健太, 藤沢潤, Forbidden subgraphs implying graph properties, 日本数学会, 2010.3.24, 慶応大学.

(2) G. Sueiro and 太田克弘, Forbidden induced subgraphs for perfect matching, 日本数学会, 2009.9.24, 大阪大学.

(3) 太田克弘, A minimum degree condition for forests, 離散数学とその応用研究集会 2009, 2009.8.7, 茨城大学 (招待講演).

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし