

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20340025

研究課題名（和文） 量子確率論と無限次元解析

研究課題名（英文） Quantum Probability Theory and Infinite Dimensional Analysis

研究代表者

尾畑 伸明（OBATA NOBUAKI）

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：10169360

研究成果の概要（和文）：

ランダム現象の背後に隠された非可換性に着目した数理モデルの基礎研究において成果をあげた。量子ホワイトノイズ微分という新しい概念を導入し、量子確率積分の拡張、フォック空間上の作用素の積分表示、量子マルチンゲールの表現、ボゴリューボフ変換の特徴づけに応用した。複雑ネットワークの構造解析に向けて、量子確率論的手法によるスペクトル解析やランダム・ウォークの推移確率計算、自由確率論と自由エントロピー、行列不等式などを研究した。

研究成果の概要（英文）：

We investigated mathematical models of random phenomena by revealing and utilizing non-commutative structures hidden behind. We introduced the new concept of quantum white noise derivative and applied to generalization of quantum stochastic integrals, integral representation of Fock space operators, representation of quantum martingales, and characterization of Bogoliubov transformation. For the structural analysis of complex networks, we developed the quantum probabilistic approach to spectral analysis and transition probability of random walks, and studied free probability, free entropy, and matrix inequalities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2009 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2010 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
年度			
総計	9,500,000	2,850,000	12,350,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：量子確率論・ホワイトノイズ解析・無限次元解析・複雑ネットワーク・直交多項式・確率解析・フーリエ-ガウス変換・量子中心極限定理

## 1. 研究開始当初の背景

量子確率論のルーツはフォンノイマンの有名な著書「量子力学の数学的基礎」に遡るが、1980年代以降、量子伊藤解析の流れと自由確率論の流れに沿って大きく発展している比較的新しい研究分野である。本研究は、次に

述べる2つの側面をさらに発展させ、より高い立場で融合することをめざした。

(1) 解析的側面 Hudson-Parthasarathy (1984) は量子伊藤解析の名の下に、伊藤解析の量子的拡張を展開し、ダイレーション問題（与えられた半群を、空間を拡張して1径数ユニタリ群の射影としてとらえる）を量子

確率微分方程式によって解く新しい方法論を確立した。伊藤解析が無次元空間上の超関数論を基礎とする確率解析（マリアバン解析やホワイトノイズ解析など）に発展しているように、量子伊藤解析を非可換無限次元解析としてとらえるのが自然である。この方向で、Attal や Belavkin は量子確率微分方程式を扱い、研究代表者らは「量子ホワイトノイズ解析」の名の下に、超関数論の枠組みを導入して理論体系を拡張し、高次ホワイトノイズなど特異なノイズを含むホワイトノイズ方程式の一般論を構築してきた。

(2) 代数的側面 Voiculescu (1986) は古典確率論の独立性の概念を「自由独立」で置き換えた自由確率論を提唱し、作用素環論における難問の解決のための枠組みを構築した。以来、自由確率論は作用素環の一分野として発展しているだけでなく、日合や Petz によるランダム行列やエントロピーの研究、Biane や 洞による無限対称群の表現論への応用など境界領域において幅広く展開している。量子確率論は自由確率論を含むより広い理論体系であり、通常の独立性（古典独立あるいは可換独立）や自由独立にとどまらず、多様な独立性が定式化され、付随する量子中心極限定理が導出されている。新しい展開として、研究代表者や 洞は、グラフの漸近的スペクトル解析への応用を拓いてきた。

## 2. 研究の目的

研究開始当時、解析的側面から代数的側を見ると、確率過程や確率微分方程式になど時間発展を伴う解析的な研究にあまり注意が払われておらず、逆の立場では、伊藤解析の代数的枠組みとしてのボゾン解析（あるいはガウス解析）を超えて、量子確率論の提供する多様な独立性を念頭に置いた研究は端緒についたばかりである。本研究では、これまでの研究成果を融合的に発展させるとともに、グラフのスペクトル解析における量子確率論的手法を進展させて、古典的な問題（可換な世界）を量子確率論（非可換な世界）を経由して研究するという新しいパラダイムを提示することを目的とした。量子確率論の立場から確率過程論をはじめ、調和解析・グラフ理論・数理物理の諸問題に潜む非可換構造に光を当て、新しい解析法を開拓し、「非可換+無限次元」解析学に貢献するという方向性が本研究の特色である。

具体的な研究項目は次の通りである。

(1) 量子ホワイトノイズ方程式：量子確率微分方程式 (Hudson-Parthasarathy 方程式) は、ホワイトノイズ超関数空間において定式化することでホワイトノイズ作用素に

対する線形微分方程式となり、量子ホワイトノイズの1次式をノイズ項として含む。量子ホワイトノイズはヒルベルト空間では扱いが困難である（非有界作用素値超関数となる）が、ゲルファントの三つ組を基礎とするホワイトノイズ理論では連続線形作用素となる。したがって、量子ホワイトノイズの高次冪や非線形関数が定義され、これを「ノイズ」として含む量子ホワイトノイズ微分方程式が自然な研究対象となる。これに関連して、① 解の存在と正則性、特に、解の作用するヒルベルト空間を構成する一般原理を追究する。② 量子ホワイトノイズの非線形関数において、量子ホワイトノイズを座標として扱う微分法を確立する。③ これを用いて、量子確率過程（特に、量子マルチンゲール）への応用を探る。④ 量子ホワイトノイズの高次冪とレヴィラプラシアンとの関連を調べ、付随する熱方程式を考察する。レヴィラプラシアンの量子的拡張および高次量子ホワイトノイズを含む熱方程式の解を構成する。

(2) 非ガウス型量子確率過程：ブラウン運動やその時間微分であるホワイトノイズに対しては、無限自由度という困難さを除けば、よく知られたボゾンフォック構造が利いて量子分解が適用され、量子ブラウン運動や量子ホワイトノイズが得られる。研究代表者と 洞は、1 モード相互作用フォック空間（1変数直交多項式とほぼ等価な理論）を用いて、ガウス型とは限らない一般の確率変数の量子分解を確立した。この量子分解を多モード相互作用フォック空間に拡張することを大きな目標として、次の諸課題の解決を図る。① 多変数直交多項式に付随する多モード相互作用フォック空間において、漸化式に現れる係数行列（ヤコビ係数）、モーメント列、分布密度の関係式を調べる。② 自由確率論とのボゾン解析を補間する  $q$ -類似を精査して、量子ホワイトノイズ解析の  $q$ -類似をめざす。 $q$ -交換関係や  $q$ -独立性を視野に入れ、一般の古典確率過程の  $q$ -拡張の研究を端緒につけたい。

(3) 成長グラフの漸近的スペクトル解析：グラフのスペクトル解析における量子確率論的手法は、グラフ構造と多様な独立性との対応、隣接行列の量子分解、分割の統計とモーメント-キュミュラント公式、に基づき、極限において1モード相互作用フォック空間の構造に帰着するところが鍵であった。この手法をより広いクラスに適用できるように一般化し、複雑ネットワークモデルの解析への応用を拓くことが目的である。次の諸課題の解決を目指した。① 多モード相互作用フォック空間の理論を進展させる（上記(2)

にも関連する)。② グラフ構造と独立性の諸概念の対応を確立し、漸近的スペクトル分布を量子中心極限定理として導出する。③ グラフ上のランダム・ウォークや量子ウォークのスペクトル解析に応用する。④ 複雑ネットワークへの応用を視野に入れて、(広い意味で)ランダムグラフの漸近スペクトルの具体形を量子確率的手法によって導出する。⑤ ランダムグラフの隣接行列などを直接ランダム行列として扱うことで、自由確率論の諸手法を検討する。

### 3. 研究の方法

(1) 研究分担：研究分担者と連携研究者はそれぞれの専門を背景として、無限次元・非可換・量子をキーワードに互いの連携を強化するとともに、課題探索を行うものとした。日合・鈴木・齊藤は主に解析学の立場から、洞・吉田は表現論や組合せ論から、浦川はスペクトル幾何学的諸相から、そして梁・廣島は数理物理学から様々な問題を提起し、議論を深めた。

(2) セミナー：本学情報科学研究科において、論文紹介・研究動向の調査・研究経過報告・研究成果の紹介などを目的としたセミナーを開催した。また、連携研究者はじめ内外研究者を招聘して、集中講義形式の勉強会を開催した。海外からの招聘としては、2008年度はHabib Ouerdiane (チュニス大学) Wided Ayed (ナブール大学) 2009年度はTomasz Luczak (ポズナニ大学) Adam Skalski (ランカスター大学)、2010年度はClaus Koestler (アベリストウィス大学) が講師を務めた。

(3) 国際ワークショップの開催：本研究に並行して2008~2009年度は二国間交流事業共同研究(日本-ポーランド)、2008~2010年度は二国間交流事業共同研究(日本-韓国)を実施したため、本研究において国際共同が格段に発展した。特に、第8回(2008.11.10-12)、第9回(2009.9.11-12)、第10回(2010.12.16-17)仙台ワークショップ「無限次元解析と量子確率論」(於：本学情報科学研究科)を主催し、内外の関連研究者による議論を深めた。第8回仙台ワークショップのプロシーディングスを本研究科のジャーナル(Interdisciplinary Information Sciences)の特集号として2009年に発刊し、成果の公表と新しい共同研究課題探索に役立てた。

(4) 成果の公表：ポーランド・バナッハセンターでは、2004年来毎年、「非可換調和解析とその確率論への応用」と題する国際会議が開催され、量子確率論周辺の多くの有力な

研究者が参集する。研究代表者は当初より学術委員として参画しており、日合・洞・吉田らは招待講演者として参加してきた。研究代表者・分担者・連携研究者は、論文発表に加えて、このような国際協同に積極的に参画しながら、国内外の関連研究会の機会をとらえて成果の公表に務めた。これによって、研究者ネットワークを定着させ、新たな共同研究の提案につなげることができた。

### 4. 研究成果

量子ホワイトノイズ理論の発展、無限次元解析の深化、グラフのスペクトル解析への量子確率論的アプローチ、複雑ネットワークや生物モデルに現れる確率モデル、に関して成果が得られた(項目ごとには下に詳述)。未解決問題の整理と広く周辺関連領域の探索を行い、継続研究を発展させることとした。

(1) 量子ホワイトノイズ方程式：ホワイトノイズの高次ベキや非線形関数を含む「量子ホワイトノイズ方程式」は従来の伊藤解析を大きく超えるもので、量子確率解析の新展開にふさわしい課題である。研究代表者はJi(海外共同研究者)とともに、量子ホワイトノイズ微分という新しい概念を導入し[19]、量子確率積分の拡張[13]、フォック空間上の作用素の積分表示[12]、量子マルチンゲールの表現[11]などに応用した。さらに、正準交換関係の変換問題を量子ホワイトノイズ微分方程式に帰着することで、ボゴリューボフ変換の新しい特徴づけを与えた[1]。これによって、正準交換関係のユニタリ同型問題に別証明を与えただけでなく、非ユニタリ変換への道筋をつけることができた。この方向で、ボゴリューボフ変換やギルサノフ変換をフリーエ・ガウス変換の枠組みで統一的に扱うことが可能となり、ユニタリ化問題について継続研究中である。

(2) 非ガウス型量子確率過程：相互作用フォック空間の多モード化の観点から具体例の蓄積を続けた。星形グラフ上のランダムウォークに対して、グラフの頂点を添字とする直交多項式系を構成して、ランダム・ウォークの推移確率の積分表示を与えた[4]。ランダム行列と自由エントロピーを基礎として、自由確率論と関連する行列解析を総合的に研究した[7]。自由エントロピーの手法を応用して、相互圧力関数の新しい概念を導入し、通常の圧力関数と相互情報量との関係を示した[5][17]。行列解析を量子情報理論に関連して、量子仮説検定の誤り確率の評価を導いた[14, 22]。量子マルコフ連鎖の平均場近似によって自由エネルギーを計算した[24]。自由確率論( $q=0$ )の研究が進展したが、 $q$ -変

形については多くの困難があり、継続研究中である。また、ある種の反応拡散系におけるパターン形成の安定性などの諸性質を明らかにした[9][10]。これは、非線形かつ非マルコフ過程の構築を目指した準備的知見と位置づけられる。

(3) 成長グラフの漸近的スペクトル解析：量子確率論における独立性の諸概念とグラフの構造の関連に着目し、複雑ネットワークのスペクトル解析を目指す基礎的成果が得られた。まず、基本的な4つの独立性をグラフ積に対応させ、漸近スペクトルを量子中心極限定理の系として導出する基本原理を得た[21]。有効グラフを含め、複雑なグラフを小さなグラフの合成として扱うために新しいグラフ積の試論を構築し、継続研究中である。また、4つのグラフ積とQ行列の正值性との関連を明らかにした[3]。これまでの多くの具体例を量子分解法の下に統一した[20]。閾値モデルの隣接行列[2]やハミンググラフの距離行列などの漸近的スペクトル分布を導出し、具体例の集積を継続している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 35 件)

- [1] U. C. Ji and N. Obata: Implementation problem for the canonical commutation relation in terms of quantum white noise derivatives, *J. Math. Phys.* 51 (2010), 173-187. 査読有
- [2] Y. Ide, N. Konno and N. Obata: Spectral properties of the threshold network model, *Internet Math.* 6 (2010), 173-187. 査読有
- [3] N. Obata: Markov product of positive definite kernels and applications to Q-matrices of graph products, *Colloq. Math.* 122(2010), 177-184 . 査読有
- [4] N. Obata: One-mode interacting Fock spaces and random walks on graphs, *Stochastics*, in press. 査読有
- [5] F. Hiai: A new approach to mutual information. II, *Banach Center Publications* 89 (2010), 143-163. 査読有
- [6] K. Audenaert, F. Hiai and D. Petz: Strongly subadditive functions, *Acta Math. Hungar.* 128 (2010), 386-394. 査読有
- [7] F. Hiai: Matrix analysis: matrix monotone functions, matrix means, and majorization, *Interdiscip. Inform. Sci.* 16 (2010), 139-246. 査読有
- [8] Y. Hoshikawa and H. Urakawa: Affine

Weyl groups and the boundary value eigenvalue problems of the Laplacian, *Interdiscip. Inform. Sci.* 16 (2010), 93-109. 査読有

[9] G. Karch and K. Suzuki: Spikes and diffusion waves in a one-dimensional model of chemotaxis, *Nonlinearity* 23 (2010), 3119-3137. 査読有

[10] K. Suzuki and I. Takagi: On the role of basic production terms in an activator-inhibitor system modeling biological pattern formation, *Funkcialaj Ekvacioj*, in press. 査読有

[11] U. C. Ji and N. Obata: Annihilation-derivative, creation-derivative and representation of quantum martingales, *Commun. Math. Phys.* 286 (2009), 751-775. 査読有

[12] U. C. Ji and N. Obata: Quantum stochastic integral representations of Fock space operators, *Stochastics* 81 (2009), 367-384. 査読有

[13] U. C. Ji and N. Obata: Quantum stochastic gradient, *Interdisciplinary Information Sciences* 15 (2009), 345-359. 査読有

[14] F. Hiai, M. Mosonyi and M. Hayashi: Quantum hypothesis testing with group symmetry. *J. Math. Phys.* 50 (2009), 103304, 31 pp. 査読有

[15] F. Hiai: Monotonicity for entrywise functions of matrices, *Linear Algebra Appl.* 431 (2009), 1125-1146. 査読有

[16] F. Hiai and Y. Ueda: A log-Sobolev type inequality for free entropy of two projections. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 45 (2009), 239-249. 査読有

[17] F. Hiai, T. Miyamoto and Y. Ueda: Orbital approach to microstate free entropy. *Internat. J. Math.* 20 (2009), 227-273. 査読有

[18] H. Urakawa: Convergence rates to optimal distribution of the Boltzmann machine on simulated annealing, *Interdiscip. Inform. Sci.* 15 (2009), 291-299. 査読有

[19] U. C. Ji and N. Obata: Generalized white noise operator fields and quantum white noise derivatives, *Séminaires et Congrès* 16 (2008), 17-33. 査読有

[20] A. Hora and N. Obata: Asymptotic spectral analysis of growing regular graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 360 (2008), 899-923. 査読有

[21] N. Obata: Notions of independence in quantum probability and spectral analysis of graphs, *Amer. Math. Soc. Transl.* 223

(2008), 115–136. 査読有

[22] F. Hiai, M. Mosonyi and T. Ogawa: Error exponents in hypothesis testing for correlated states on a spin chain. *J. Math. Phys.* 49 (2008), 032112, 22 pp. 査読有

[23] F. Hiai and Y. Ueda: Notes on microstate free entropy of projections. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 44 (2008), 49–89. 査読有

[24] F. Hiai, M. Mosonyi, H. Ohno and D. Petz: Free energy density for mean field perturbation of states of a one-dimensional spin chain, *Rev. Math. Phys.* 20 (2008), 335–365. 査読有

[学会発表] (計 48 件)

[1] F. Hiai: Generalizing Minkowski’s determinantal inequality, International Conference “Product Systems and Independence in Quantum Dynamics,” 2011.3.14–18, Greifswald, Germany.

[2] F. Hiai: Convexity of quasi-entropy type functions: Lieb’s and Ando’s convexity theorems revisited, The 6th Jikji Workshop: Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2011.1.8–12, Daejeon, Korea.

[3] K. Suzuki: Existence and behavior of solutions to aggregation equations, The 6th Jikji Workshop: Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2011.1.11, Daejeon, Korea.

[4] N. Obata: Join of one-mode interacting Fock spaces and applications to random walks, The 6th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2011.01.10, Daejeon, Korea.

[5] N. Obata: Join of one-mode interacting Fock spaces and applications, 10th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2010.12.17, Sendai, Japan.

[6] K. Suzuki: Patterns of the shadow system with nontrivial basic production terms, Concentration and Related Topics on Nonlinear Problems, 2010.11.22, Sendai, Japan.

[7] K. Suzuki: Steady-state patterns of the shadow system with nontrivial basic production terms, Partial Differential Equations in Mathematical Biology, 2010.9.13, Bedlewo, Poland.

[8] N. Obata: Deformed vacuum states and  $Q$ -matrices of graphs, Symposium on Analysis and Probability 2010,

2010.08.10–12, Taipei, Taiwan

[9] F. Hiai: Riemannian metrics on positive definite matrices related to means, Information Geometry and its Applications III, 2010.8.2–6, Leipzig, Germany.

[10] N. Obata: Quantum probabilistic aspect to random walks on graphs, 13th Workshop on Noncommutative Harmonic Analysis 2010.07.11–17, Bedlewo, Poland.

[11] K. Suzuki: Spikes and diffusion waves in one-dimensional model of chemotaxis, Nonlocal operators and partial differential equations, 2010.6.29 Bedlewo, Poland.

[12] N. Obata: Some New Aspects of Bogoliubov Transformations from Quantum White Noise Calculus, 5th Jikji Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2010.1.6–8, Cheongju, Korea.

[13] N. Obata: Quantum white noise derivatives and applications, International Conference on Stochastic Analysis and Applications, 2009.10.12–17, Hammamet, Tunisia.

[14] H. Urakawa: Geometry of biharmonic maps, Conference of harmonic maps—in honor of Professor J. Wood’s sixtieth birthday, 2009.9.8, Cagliari, Italy.

[15] N. Obata: Quantum white noise calculus: Quantum white noise derivatives and applications, 12th Workshop on Noncommutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, 2009.8.16–22, Bedlewo, Poland.

[16] F. Hiai: Riemannian metrics on positive definite matrices related to means, 12th Workshop on Noncommutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, 2009.8.16–22, Bedlewo, Poland.

[17] N. Obata: Recent developments in quantum white noise calculus: Quantum white noise derivatives and implementation problem, 2009 NIMS Hot Topics Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Related Topics, 2009.6.22, Daejeon, Korea.

[18] N. Obata: Spectral analysis of random complex networks, The 3rd Cheongju Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, 2009.01.12, Cheongju, Korea.

[19] N. Obata: Recent developments in quantum white noise theory: Stochastic integrals and transformations, 29th

Conference on Quantum Probability and Related Topics, 2008.10.13, Hammamet, Tunisia.

[20] F. Hiai: Orbital approach to free entropy and free pressure, 2008 Global Korean Mathematical Society International Conference, 2008.10.23-25, Jeju, Korea.

[21] F. Hiai: Mutual information and mutual pressure, Conference on Information and Communication, 2008.8.25-28, Budapest, Hungary.

[22] F. Hiai: Pressure and its Legendre transform in microstate free entropy, 11th Workshop "Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Probability," 2008.8.17-23, Bedlewo, Poland.

[23] H. Urakawa: Conformal Geometry, Harmonic Maps and Biharmonic Maps, International Conference of Conformal Geometry-Invariant Theory and Variational Method, 2008.6.30-7.4, Roscoff, France

[24] N. Obata: Quantum probabilistic approach to spectral analysis of growing graphs, Korea Operator Theory and Its Applications Conference (KOTAC 2008), 2008.06.19, Seoul, Korea.

[図書] (計 2 件)

[1] N. El Karoui, P. Malliavin, G. Di Nunno, N. Obata, B. Øksendal and H. Ouerdiane (国際会議プロシーディングス共同編集): "Stochastics on Stochastic Analysis," A special issue of Stochastics, Vol. 81, No. 3-4, 2009.

[2] N. Obata, F. Hiai, M. Bożejko and U. C. Ji (国際会議プロシーディングス共同編集): "New trends in infinite dimensional analysis and quantum probability," special issue, Interdiscip. Inform. Sci. Vol.15, No.3, 2009.

[その他]

ホームページ等

[www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/](http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 10169360

### (2) 研究分担者

日合 文雄 (HIAI FUMIO)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 30092571

浦川 肇 (URAKAWA HAJIME)

東北大学・国際教育院・教授

研究者番号: 50022679

鈴木 香奈子 (SUZUKI KANAKO)

東北大学・国際高等研究教育機構・助教

研究者番号: 10451519

### (3) 連携研究者

梁 淞 (LIANG SONG)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・

准教授

研究者番号: 60324399

洞 彰人 (HORA AKIHITO)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 10212200

齊藤 公明 (SAITO KIMIYAKI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号: 90195983

廣島 文生 (HOROSHIMA FUMIO)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号: 00330358

吉田 裕晃 (YOSHIDA HIROAKI)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成  
科学研究科・教授

研究者番号: 10220667