

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20340027

研究課題名（和文） 代数解析的方法による量子可積分系の研究

研究課題名（英文） Algebro-analytic study of quantum integrable systems

研究代表者

神保 道夫 (JIMBO MICHIO)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：80109082

研究成果の概要（和文）：

量子可積分系における局所場の空間に新しいフェルミオン基底を導入し、その期待値を記述した。すなわち、6 頂点模型の擬局所作用素に作用するフェルミオンを定義し、極めて一般的な設定のもとで、フェルミオン基底の期待値が、ある 2 変数関数のみを用いて表されることを示した。また共形場理論への極限で低次の場合にフェルミオン基底とヴィラソロ基底の関係を求め、サイン・ゴルドンモデルにおける 1 点関数を求める新しい枠組みを提出した。

研究成果の概要（英文）：

In the space of local operators of quantum integrable systems, we have introduced a new fermionic basis and described their expectation values. More specifically, in the 6 vertex model we defined an action of fermions on quasi-local operators, and in a very general setting expressed their expectation values of the fermionic basis in terms of a single function of two variables. In the limit to conformal field theory we determined the relation between the fermionic and Virasoro bases for low degrees. We also proposed a novel framework for calculating the one point functions in the sine-Gordon model.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	3,300,000	990,000	4,290,000
2009 年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2010 年度	2,200,000	660,000	2,860,000
年度			
年度			
総計	8,200,000	2,460,000	10,660,000

研究分野：数理解析学、代数解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：XXZ 模型, 可積分場の理論, 共形場理論, 相関関数, 量子アフィン代数
フェルミオン, sine-Gordon 模型

1. 研究開始当初の背景

(1) 1990 年代の研究代表者らの研究によ

り、XXZ 模型におけるゼロ温度の相関関数に対して多重積分表示が得られていた。2000 年代になって、これら

の多重積分はつねに 1 重積分に帰着することが経験的に発見された。研究代表者らのグループはこの事実に一般的な証明を与えたが、その過程で (擬) 局所作用素の空間に働くフェルミオンの消滅演算子が導入できることを発見した。その発展としてフェルミオンの生成演算子の構成が次の課題になっていた。

- (2) Wuppertal の研究グループは、有限温度の場合の相関関数を検討し、ゼロ温度の場合とほぼ同様に多重積分が 1 重積分に帰着すること (「積分の因子化」) を予想した。(1) の結果をこのような一般的な設定に拡張することが望まれていた。
- (3) 1990 年代に A.I. Zamolodchikov により、可積分な場の理論を共形場理論からの摂動ととらえ、作用素積展開と組み合わせて相関関数の近距離挙動を研究する方法が提出されていた。この立場では一般の descendant 場に対する 1 点関数に非摂動的情報が集約されており重要である。Lukyanov, A. Zamolodchikov らにより、サイン・ゴルドンモデルのプライマリ場およびもっとも簡単な descendant 場については 1 点関数の公式が与えられたが、組織的な研究は進んでいなかった。

2. 研究の目的

中長期的な目標は量子可積分系における局所場の空間を記述し、相関関数を理解することである。特に現状では個別の方法で研究されている格子模型・共形場理論・可積分場の理論をできる限り統一的に扱うことが望ましい。最近発見されたフェルミオン構造はそのための有力な手がかりと考えられるので、この研究をさらに展開する。具体的には次の諸点を解明することが本研究の目的である。

- (1) フェルミオンの生成演算子の構成を確立する。
- (2) 温度を含むもっとも一般的な形でフェルミオン基底の期待値の公式を与える。
- (3) 共形場理論、および massive な場の理論への極限を考察し、フェルミオンによる局所作用素の新しい記述を行う。

3. 研究の方法

次の 3 つのステップを順次実行する。

- (1) 格子模型におけるフェルミオン：以

前の研究で導入した消滅演算子に対し正準共役である生成演算子を定義し、反交換関係、局所性などの諸性質を確立する。また運動の保存量の作用と合わせて、フェルミオンにより擬局所作用素の空間の基底を構成する。

構成の方法は基本的には代数的ベテ仮説法ないし量子群の表現論であるが、従来の研究にはない側面が含まれている。

- (2) 一般化された期待値：真空期待値のみならず、有限温度系においても期待される「積分の因子化」を説明するため、円筒状の格子における一般化された期待値を導入し、フェルミオン基底の期待値を表示する。
- (3) 連続極限：格子におけるフェルミオンの連続極限を追跡することは困難であるが、その期待値の極限は解析可能である。共形場理論への極限を考察し、フェルミオン基底をヴィラソロ基底と比較する。ここでは Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov による Q 作用素の構成とその漸近解析が利用できる。さらにサイン・ゴルドン理論への極限をとることにより、従来知られていた一点関数の例を組織的に拡張する。

4. 研究成果

研究開始時点に比較して、フェルミオンの存在と諸性質、フェルミオン基底の期待値などについてある程度まとまった知識を確立することができた。フェルミオン構造は、格子モデル・連続極限にかかわらず、 s_12 量子アフィン代数を対称性とする量子可積分系における共通の普遍的構造であることが示されたと考えている。以下個々の研究成果について述べる。

(1) フェルミオンの構成：

XXZ スピンチェインの擬局所作用素の空間に働くフェルミオンの生成演算子を導入し、その局所性と交換関係を証明した (論文①, ただし生成演算子どうしの交換関係はこの論文では未証明)。構成には s_12 アフィン量子群の q 振動子表現を用いる。生成演算子の構成は発見的であり、証明はあるが代数的な正体は未証明である。フェルミオンで構成された基底の元の通常の真空期待値に対しては Wick の定理が適用可能であること、従って隣接格子点の場合の期待値 $\omega(\xi, \zeta)$ がわかれば一般の場合は

その行列式で求められることを示した。これが「積分の因子化」の代数的証明を与える。なお、斉次チェーンの場合に基底の構成は非自明であり、論文⑤でなされた。

(2) 期待値の公式 :

有限温度のスピンチェーンを扱う標準的な方法に従って、円筒格子上で6頂点模型を考察し、格子欠損を持つ分配関数の比として一般の期待値を導入した。(1)で構成したフェルミオン基底の期待値に対し、真空期待値の場合と同様にWickの定理が適用可能であることを示したのが論文⑥の主結果である。証明の手法は、超楕円曲線におけるリーマン関係式の差分類似を用いる。上述の $\omega(\xi, \zeta)$ は正規化された第2種微分の類似となっている。

(3) 共形場理論への極限 :

格子模型におけるフェルミオンの定義は複雑であり、連続極限を文字通り追跡することはきわめて難しい。しかしフェルミオン基底の元はその期待値がすべて表示可能であるから、期待値の極限をとることは可能である。これにより「弱極限」としてのフェルミオンの存在が予想される。論文③においては有限半径の円筒状の共形場理論を考察し、 $\omega(\xi, \zeta)$ の漸近展開を計算することによって、フェルミオン基底とヴィラソロ基底との遷移行列の係数を6次まで決定した。ただし技術的理由により、関係式は運動の保存量を法としてしか求めることができていない。

(4) サイン・ゴルドンモデル :

スペクトルパラメタを交互に変えた staggered lattice を考えることで、連続極限に質量を導入できることが知られている。論文②はその処方にしたがって平面上のサイン・ゴルドンモデルへの極限を考察し、指数作用素からフェルミオンを施して得られる一般の descendant 場に対し、その一点関数が単純な公式で与えられることを示した。最も簡単な場合、これは Fateev らによる既知の(唯一の)結果を正しく再現する。論文①ではさらに円筒上でのサイン・ゴルドンモデルへの拡張を行った。この場合の一点関数は未知であった。また異なるパラメタの指数作用素をつなぐ screening 作用素のフェルミオ

ン類似を導入し、種々の整合性条件の成立を示した。

(5) その他の成果 :

以前から続けている共形場理論における指標の組み合わせの研究の一環として、量子群のヴァーマ加群における Whittaker ベクトルと Drinfeld Casimir 元を用いて、差分戸田ハミルトニアン固有関数に対するフェルミ型公式を導いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

① M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Hidden Grassmann structure in the XXZ model V: sine-Gordon model, Lett. Math. Phys., 査読有, 96 巻, 2011, 325--365

② M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, One-point function of descendants in sine-Gordon model, Proceedings of the workshop 'New Trends in Quantum Integrable Systems', 査読有, Eds. B. Feigin, M. Jimbo and M. Okado, World Scientific, 2010, 117-137

③ H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Hidden Grassmann structure in the XXZ model IV: CFT limit, Commun. Math. Phys., 査読有, 299 巻, 2010, 825-866

④ B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Fermionic formulas for eigenfunctions of the difference Toda Hamiltonian, Lett. in Math. Phys., 査読有, 88 巻, 2009, 39-77

⑤ H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Completeness of a fermionic basis in the homogeneous XXZ model, J. Math. Phys., 査読有, 50 巻, 2009, 095206 (online)

⑥ M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Hidden Grassmann structure in the XXZ model III: Introducing Matsubara direction, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 42 巻, 2009, 304018

⑦ H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov and Y. Takeyama, Hidden Grassmann structure in the XXZ model II: Creation operators, Commun. Math. Phys., 査読有, 286 巻, 2009, 875-932

[学会発表] (計7件)

① 神保道夫, サイン・ゴルドンモデルの可積分構造をめぐって, 場の理論・量子重力研究会, 2011年1月6日, 立教大学

② 神保道夫, サイン ゴルドンモデルにおけるフェルミオン構造, 日本数学会秋期総合分科会 特別講演, 2010年9月25日, 名古屋大学

③ 神保道夫, What are the 'full symmetries' in quantum integrable models ?, 招待講演, Group Theoretical Methods in Physics 2010, Newcastle, 2010年7月28日

④ 神保道夫, One-point functions in the sine-Gordon model, 招待講演, Recent Advances in Quantum Integrable Systems 2010, Annecy, France 2010年6月16日

⑤ 神保道夫, Hidden Grassmann structure in the XXZ model, 招待講演, Tokyo-Seoul Conference in Representation Theory, 東京大学数理科学研究科, 2009年12月4日

⑥ 神保道夫, Hidden fermionic structure in the XXZ model II: Technical details, 招待講演, Workshop 'Quantum integrable systems and solvable statistical mechanical models', CRM, Montreal, 2008年7月

⑦ 神保道夫, A fermionic structure in the XXZ model, Workshop 'From Painleve to Okamoto', 招待講演, 東京大学数理科学研究科, 2008年6月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

神保 道夫 (JIMBO MICHIO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号: 80109082

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし