

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 1日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2008～2012

課題番号：20340029

研究課題名（和文） 正準変換と比較原理の手法による分散型方程式の解の諸性質の解明

研究課題名（英文） Analysis of properties of solutions to dispersive equations via canonical transforms and comparison principle

研究代表者

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60196756

研究成果の概要（和文）：フーリエ積分作用素の大域的な有界性の理論を整備することにより、偏微分方程式の解の様々な評価式を導出する際に標準形へと変換してから考察する手法を確立し、さらには二つの偏微分方程式の表象の比較からそれぞれの解の評価式を比較する新しい手法も整備して、非線型問題にアプローチした。

研究成果の概要（英文）：By developing a global boundedness theory of Fourier integral operators, we established a method to deduce estimates for solutions to partial differential equations from those for their normal forms, and furthermore, prepared a new method to make a comparison of estimates for solutions from the comparison of symbols of two partial differential equations, so that we approached to nonlinear problems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2009年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2010年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2011年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2012年度	2,800,000	840,000	3,640,000
総計	14,300,000	4,290,000	18,590,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：正準変換 比較原理 分散型方程式 時空間評価

1. 研究開始当初の背景

フーリエ積分作用素の理論は、1970年代までには Hörmander らによりほぼ確立されたものとなっているが、それを偏微分方程式の諸問題に応用しようとする場合、問題によっては様々な理論の不備に直面する事がある。その中でも特に顕著なのが、具体的な関数空間上での有界性に関するものである。実際、Hörmander によりその局所 L^2 空間における有界性が示されていたが、大域的な場合の有界性は、ごく限られたクラスの場合に示されているのみである。特に大域的な正

準変換を記述するフーリエ積分作用素はこれらのクラスには属しておらず、新たな理論展開が必要となっていた。

2. 研究の目的

この研究は、偏微分方程式の解の様々な評価式を導出する際に、その表象の座標変換により標準形へと変換してから考察する手法（正準変換）を確立すべく、まずはフーリエ積分作用素の大域的な有界性の理論を整備し、さらには二つの偏微分方程式の表象の比較からそれぞれの解の評価式を比較する

新しい手法（比較原理）を組み合わせることにより、偏微分方程式論の諸問題にアプローチすることを目指すものである。

3. 研究の方法

以下の課題に対して順にアプローチしていくことにより、研究目的を遂行した：

- ① フーリエ積分作用素論の整備：フーリエ積分作用素が具体的な関数空間上で大域的に有界であるための、相関数・表象に関するなるべく広いクラスを見つけ、また、そこでの表象計算の理論を構築する。
- ② 比較原理の一般化：分散型方程式の低次元モデルに対して知られている比較原理は、定数係数の場合における平滑化評価式の場合に限られている。これを変数係数の場合や、他の関数空間における時空間評価式の場合にまで拡張する。
- ③ 分散型方程式の解の基本評価式：変数係数の場合を含むより一般の分散型方程式に対して、平滑化評価式、Strichartz 評価式などの時空間評価式を導出する。
- ④ 非線形分散型方程式：上記で得られた時空間評価式を用いて、非線形分散型方程式の初期値問題における時間大域解を考察する。

4. 研究成果

上記課題に関して、以下の成果を収めた：

- ① L^p -空間においてフーリエ積分作用素は有界ではないため、その替わりとして相空間において均質な取り扱いをするモジュレーション空間に着目した。この空間は比較的新しく提唱されたものであり、その基本的性質は未だ完全には解明されていないため、まずはその解明に努めた。特に、 L^p ソボレフ空間とモジュレーション空間の間の包含関係を完全に決定し、モジュレーション空間において非線形作用が閉じているかという問題についても考察した。ただし、非線形偏微分方程式において比較よく登場する冪型の非線形項を取り扱うことは重要であるが、分数次数の場合に関する最終的な解決を見たわけではなく、今後への課題として残されている。
- ② ポテンシャル項を持つ分散型方程式に対する平滑化評価式を考察した。変数係数の方程式を正準変換の方法により標準形に変換したとしても、低階項などの剰余

項を伴うのが普通であるが、ここでの考察はその際の一つのモデルケースとしての意味合いも持っている。主な成果として、同じスペクトルを持つ二つのポテンシャルに対しては平滑化評価式が比較できるという、スペクトル比較原理の理論を確立した。この考察を、より一般の低階項を持つ場合にまで拡張することは、今後の課題である。

- ③ 分散型方程式の場合に威力を発揮した比較原理が、非分散型の場合にまでも応用されることを示し、その平滑化評価式を導出した。また比較原理を用いることにより、標準形の方程式に対する平滑化評価式の最良定数を求めることは、そのまま一般の方程式の場合の最良定数を求めることに直結する。そのため、代表的なケースにおける様々なタイプの平滑化評価式の最良定数を決定するとともに、最良を実現する関数の存在・非存在に関するひとつの判定法を与えた。類似の研究はこれまでには知られておらず、かなり独創的な成果であるものと自負している。
- ④ 非線形項がある種の構造を持つ分散型方程式の初期値問題に対しては、構造がない場合よりも少ない仮定のもとでの時間大域解の存在を示すことができるという結果を得た。この論法をさらに発展させることにより、非等方的な媒質中の弾性方程式・マックスウェル方程式などを扱う際のひとつの方法論も確立した。波動方程式の場合には、ラプラシアンと可換なベクトル場を用いることにより、解の減衰評価における減衰のオーダーを稼ぐことができることが知られている。これにより半線形波動方程式の時間大域的解の存在が示されるというのが Klainerman のアイデアである。これを一般の双曲型方程式に適用することは、その非等質性によりかならずしも容易ではないが、これまでのフーリエ積分作用素論の研究がその端緒を開くことを確認した。この研究はまだ途上にあり、最終的成果に関しては今後の進展に期待したい。

また、これらの研究の遂行にともない、国内外の偏微分方程式論および調和解析学の研究交流は、必要不可欠なものであった。その目的のため、以下の様な国際研究集会を積極的に組織した：

- *International Workshop “PDEs and Function Spaces” Imperial College London, UK (December 3-5, 2008)
- *第 9 回名古屋国際数学コンファレンス

“Harmonic Analysis and Partial Differential Equations” (September 28–October 1, 2009)

*International Workshop “Fourier Analysis and Partial Differential Equations” University of Göttingen, Germany (June 14–17, 2010)

*“Asymptotic Properties of Solutions to Hyperbolic Equations” Imperial College London, UK (March 21–25, 2011)

*RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(July 4–6, 2011)

*“Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators” Aalto University, Helsinki, Finland (June 25–30, 2012)

*RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(July 2–4, 2012)

これらの活動は、国際的な人的交流という意味においても、かなりの成果があったものと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

[1] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Structural resolvent estimates and derivative nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* 314 (2012), 281–304. (査読有)

[2] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Smoothing properties of evolution equations via canonical transforms and comparison principle, *Proc. London Math. Soc.* 105 (2012), 393–423. (査読有)

[3] Mitsuru Sugimoto, Naohito Tomita and Baoxiang Wang, Remarks on nonlinear operations on modulation spaces, *Integral Transforms and Spec. Funct.* 22 (2011), 351–358. (査読有)

[4] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Weighted Sobolev L^2 estimates for a class of Fourier integral operators, *Math. Nachr.* 284 (2011), 1715–1738. (査読有)

[5] Michael Ruzhansky, Mitsuru Sugimoto, Joachim Toft and Naohito Tomita, Changes of variables in modulation and Wiener amalgam spaces, *Math. Nachr.* 284 (2011), 2078–2092. (査読有)

[6] Masaharu Kobayashi & Mitsuru Sugimoto, The inclusion relation

between Sobolev and modulation spaces, *J. Funct. Anal.* 260 (2011), 3189–3208. (査読有)

[7] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Criteria for Bochner’s extension problem, *Asymptot. Anal.* 66 (2010), 125–138. (査読有)

[8] Norihito Koiso & Mitsuru Sugimoto, Motion of elastic wire with thickness, *Osaka J. Math.* 47 (2010), 787–815. (査読有)

[9] Masaharu Kobayashi, Mitsuru Sugimoto & Naohito Tomita, On the L^2 -boundedness of pseudo-differential operators and their commutators with symbols in α -modulation spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 350 (2009), 157–169. (査読有)

[10] Masaharu Kobayashi, Mitsuru Sugimoto & Naohito Tomita, Trace ideals for pseudo-differential operators and their commutators with symbols in α -modulation spaces, *J. Anal. Math.* 107 (2009), 141–160. (査読有)

[11] Mitsuru Sugimoto & Naohito Tomita, A counterexample for boundedness of pseudo-differential operators on modulation spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), 1681–1690. (査読有)

[12] Mitsuru Sugimoto & Naohito Tomita, Boundedness properties of pseudo-differential and Calderon-Zygmund operators on modulation spaces, *J. Fourier Anal. Appl.* 14 (2008), 124–143. (査読有)

[13] Mitsuru Sugimoto & Naohito Tomita, A remark on fractional integrals on modulation spaces, *Math. Nachr.* 281 (2008), 1372–1379. (査読有)

他 8 件

[学会発表] (計 41 件)

[1] 2012年12月19日 研究集会 Al-Khorezmiy 2012 (於 ウズベキスタン・ウズベキスタン国立大) 「Structural resolvent estimates and derivative nonlinear Schrödinger equations」 (Plenary talk)

[2] 2012年10月17日 研究集会 (於 オーストリア・ESI) Modern Methods of Time-Frequency Analysis II, Workshop “Phase space methods for pseudo-differential operators” 「Optimal constants and extremisers for some smoothing estimates」

- [3] 2012年6月25日 研究集会
(於 フィンランド・Aalto 大) Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators 「Optimal constants for some smoothing estimates」
- [4] 2011年12月20日 研究集会 (於 台湾・NCTS) 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [5] 2011年9月19日 研究集会 (於 九州大学医学部 百年講堂) The 4th MSJ-SI “NONLINEAR DYNAMICS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS” 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [6] 2011年8月26日 研究集会 (於 ロシア・ロシア諸民族友好大学) The 8th ISAAC Congress (Plenary talk) 「Smoothing estimates for non-dispersive equations」
- [7] 2011年6月17日 研究集会 (於 オーストリア・シュトローブル) From Abstract to Computational Harmonic Analysis, Strobl 2011 「The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces」
- [8] 2011年3月24日 研究集会 (於 イギリス・Imperial College London) Asymptotic Properties of Solutions to Hyperbolic Equations 「Elliptic Operators and Corresponding Vector Fields」
- [9] 2011年2月20日 研究集会 (於 イーグレ姫路) 偏微分方程式姫路研究集会 「On some L_p -type estimates for evolution operators」
- [10] 2010年12月10日 PDE Seminar (於 イギリス・Bath 大) 「On some L_p -type estimates for evolution operators」
- [11] 2010年12月8日 Analysis Seminar (於 イギリス・Birmingham 大) 「Smoothing estimates for dispersive and non-dispersive equations」
- [12] 2010年12月3日 研究集会 (於 イギリス・Imperial College London) Microlocal Day #2 「On some L_p -type estimates for evolution operators」
- [13] 2010年7月1日 研究集会 (於 台湾・NCTS) —2010 Workshop on Fourier Analysis and Its Applications to PDEs 「Smoothing estimates for dispersive and non-dispersive equations」
- [14] 2009年9月1日 研究集会 (於 オーストリア・ウィーン大学) — International Conference on Generalized Functions GF2009— (Plenary talk) 「Smoothing estimates for dispersive and non-dispersive equations」
- [15] 2009年8月7日 第48回実函数論・関数解析学合同シンポジウム (松本市 松本中央公民館) 「発展方程式に対する平滑化評価式について」
- [16] 2009年8月11日 研究集会 (於 中国・張家界) Nonlinear PDE in Zhang Jia Jie 「Smoothing estimates for dispersive and non-dispersive equations」
- [17] 2009年5月30日 セミナー (於 中国・北京大学) 「Limiting absorption principle in the critical case and Sommerfeld radiation condition」
- [18] 2009年5月30日 研究集会 (於 中国・北京師範大学) Harmonic Analysis and Partial Differential Equations with Applications 「Space-time estimates for evolution equations via comparison」
- [19] 2009年3月27日 日本数学会年会 函数方程式論分科会 (於 東京大) 「分散型方程式の時空間評価式と比較原理」 (特別講演)
- [20] 2009年1月28日 研究集会 (於 九州大学) 「第26回九州における偏微分方程式研究集会」 「Limiting absorption principle in the critical case and Sommerfeld radiation condition」
- [21] 2008年12月10日 研究集会 (於 ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター) Linear and Nonlinear Waves, No.6 「A limiting absorption principle in the critical case and a radiation condition」
- [22] 2008年12月4日 研究集会 (於 イギリス・Imperial College London) PDEs and Function Spaces / London Analysis and Probability Seminar 「Limiting absorption principle in the critical case and Sommerfeld radiation condition」
- [23] 2008年9月25日 研究集会 (於 イタリア・Cagliari 大学) Decay and Regularity for Solutions of

Differential Equations and Dynamical systems 「 A limiting absorption principle in the critical case and a radiation condition」

[24] 2008年9月5日 研究集会(於ドイツ・ゴスラー) International Conference on Partial Differential Equations and Spectral Theory 「 A limiting absorption principle in the critical case and a radiation condition」

[25] 2008年6月23日 研究集会(於スウェーデン・Vaxjö 大学) Pseudo-differential Operators and Related Topics, II 「 Smoothing estimates for dispersive equations via canonical transforms and comparison principle」

他 16 件

[図書] (計 2 件)

- ① 訳書(新井仁之, 高木啓行, 千原浩之との共訳) プリンストン解析学講義 2 「複素解析」 エリアス・M. スタイン, ラミ・シヤカルチ著(日本評論社) 2009年6月刊 404頁
- ② 共同執筆「日本の現代数学 —新しい展開をめざして」 小川卓克・斎藤 毅・中島 啓編 (数学書房) 2010年5月刊 256頁

[産業財産権]

○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~sugimoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 60196756

(2) 研究分担者

津川 光太郎 (TSUGAWA KOTARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 70402451

加藤 淳 (KATO JUN)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科
准教授
研究者番号: 00432237

菱田 俊明 (HISHIDA TOSHIAKI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 60257243

三宅 正武 (MIYAKE, MASATAKE)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 70019496
(H21年度まで)

(3) 連携研究者

立澤 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 80227090

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10437337