

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 3日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2012

課題番号：20340030

研究課題名（和文） 対称構造のタイヒミュラー空間と擬等角写像類群の剛性および固定点問題

研究課題名（英文） Teichmüller spaces of symmetric structures and the rigidity and fixed-point problems of quasiconformal mapping class groups

研究代表者

松崎 克彦（MATSUZAKI KATSUHIKO）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：80222298

研究成果の概要（和文）：円周の自己同相写像に擬等角拡張の観点から様々のクラスを設定し、その集まり全体のパラメーター空間であるタイヒミュラー空間について研究した。とくにタイヒミュラー空間に作用する群が固定点をもつための条件を、対称写像のタイヒミュラー空間を中心にして考察した。応用として、微分自己同相写像からなる群が円周の標準的な群作用（モビウス変換群）と共役になるための条件、および、そのような群の変形が自明となる（剛性をもつ）ための条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：We define various classes for self-homeomorphisms of the unit circle from a viewpoint of their quasiconformal extension, and study the parameter spaces of those families, which are regarded as Teichmüller spaces. In particular, for the Teichmüller space of symmetric homeomorphisms, we consider conditions for a group acting on this space to have a fixed point in it. As an application, we give a condition for a group of diffeomorphisms to be conjugate to the canonical group action of the circle (Möbius transformations) as well as a condition for the deformation of such a group to be trivial (that is, to have rigidity).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2009年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2010年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2011年度	2,600,000	780,000	3,380,000
2012年度	2,600,000	780,000	3,380,000
総計	13,000,000	3,900,000	16,900,000

研究分野：複素解析，双曲幾何

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：擬対称写像，擬等角写像，モビウス変換群

1. 研究開始当初の背景

リーマン面上に等角構造の拡張として対称構造の概念を導入し、対称構造の変形空間に関するタイヒミュラー空間論を新たにつくこと、そして、写像類群のニールセン実現問題に類似する固定点問題をこの新しい空間の上で研究することを動機とした。その

背景としては、Gardiner-Sullivanにより導入された円周上の対称構造の研究が Earle-Gardiner-Lakicによりリーマン面の漸近的タイヒミュラー空間の理論へと一般化され、新しいタイヒミュラー空間論が展開されるに至ったことがある。しかし、無限次元タイヒミュラー空間への擬等角写像類

群の作用についての研究過程では、メビウス群作用で不変な対称構造、つまりリーマン面上の対称構造の解析が問題の本質である事例に多々遭遇した。本研究は、これらを広く統合する新しいタイヒミュラー空間論の構築を目標とした。さらに、この空間上で擬等角写像類群の作用を考察することにより、剛性および固定点問題に関連する幾何学的群論の展開の可能性を考えた。

2. 研究の目的

(1) Gardiner-Sullivan により導入された円周上の対称構造の研究はリーマン面の漸近的タイヒミュラー空間の理論へと一般化されたが、これと対比して、フックス群作用で不変な対称構造の変形空間の理論を構築し、この新しいタイヒミュラー空間の幾何学的構造を解明する。

(2) 群不変対称構造の剛性の問題を考察する。とくにフックス群の擬等角共役におけるメビウス剛性が、対称写像における剛性を導くことを証明する。

(3) 普遍タイヒミュラー空間の擬等角写像類群は円周の擬対称写像群と同一視できる。漸近的タイヒミュラー空間上のファイバーを不変にする部分群が対称写像群である。対称写像群の作用の固定点問題を考察することにより、円周の同相写像群がフックス群と共役になるための条件を与える問題を统一的に理解する。

3. 研究の方法

(1) 通常の研究：研究の方法は、伝統的なタイヒミュラー空間論および最近の漸近的タイヒミュラー空間の理論をモデルにして議論を平行に進められる部分と、新しいアイデアや他の分野で用いられる技法、概念の導入なしでは進めない部分に大別される。ともに研究代表者が理論全体の方針を提示し、共同研究者、連携研究者の協力を得ながらセミナー発表、勉強会、研究集会、論文作成を頻繁に行って構想をまとめていった。

(2) 研究成果の発表：得られた結果は積極的に国内外の研究集会にて発表し、関連する研究者との議論の結果および研究の動向を取り入れて発展させていった。国内では、毎年開催されるリーマン面不連続群研究集会で研究の進展状況を発表した。また日本数学会の学会ではまとまった研究内容を報告し、函数論シンポジウムではより詳しい解説をした。数理研研究集会およびその他では関連する内容のサーベイを行った。国外の集会では 2008 年にはアメリカに長期に滞在し、研究集会を主催して研究課題を広く公表した。その後もほぼ毎年、国際研究集会に参加して

研究プログラムおよび途中経過を発表してきた。とくに中国ではこの分野をリードする数学者が多いことから、中国での集会には積極的に参加した。具体的なリストは「学会発表」の項目に挙げる。

(3) 研究者の招聘：研究計画における個別のアイデア部分に関しては、共同研究者に問題を提案し、外国人研究者を招聘して関連する問題について議論した。

4. 研究成果

研究期間の前半と後半では、研究の方向に変化が生じた。前半では当初の研究目標にした対称構造のタイヒミュラー空間の基礎理論に関する成果を得たが、後半ではより限定された円周の微分同相写像群の理論へ重点が置かれた。以下では時系列に沿って得られた主な結果を記す。

(1) 群不変対称構造のタイヒミュラー空間は、剛性をもつフックス群の場合を除き、非自明な無限次元空間であることがわかった。また、この結果をリーマン面上の等角自己同型群で不変な対称構造についても拡張した。

(2) ニールセン実現問題の類似を漸近的タイヒミュラー空間において行い、漸近的タイヒミュラー空間の幾何学的な自己同型の有限部分群をリーマン面のロイデン境界の同相群の中に実現した。

(3) 擬等角写像類群の polycyclic な部分群はコンパクト開位相に関して離散的であり、あるコンパクト部分曲面を停留的に保つならば、タイヒミュラー空間に不連続に作用することを証明した。

(4) 無限次元タイヒミュラー空間に作用する写像類群の部分群とその不変部分空間の研究を、円周の同相写像群がメビウス群と共役になるための条件を与える問題に応用した。有界軌道をもつ対称写像部分群は一般には固定点が存在しないことを示したが、対称写像を境界値としてもつ単位円板の擬等角写像の歪曲係数に可積分条件を与え、その条件をみたく部分群を考えれば、対応する不変部分空間に固定点が存在することがわかった。

(5) 円周上のフックス群で不変な対称構造のタイヒミュラー空間の類似として、フックス群の微分同相群への変形空間を考察し、対称写像での共役による変形が剛性をもつことを証明した。これにより、この変形空間も、フックス群不変な対称構造のタイヒミュラー空間と同様に、普遍漸近的タイヒミュラー空間の部分空間として実現されることがわかった。微分同相写像群のクラスを微分のヘルダー連続性の指数により与えれば、指数に応じた部分空間の減少列が得られ、フックス群のタイヒミュラー空間に退化する指数

を決定する問題が新たに定式化された。また、上記の剛性定理の応用として、ヘルダー連続な微分をもつ微分同相写像群がメビウス変換群に同じクラスの微分同相写像により共役となるための条件を、擬等角拡張の歪曲係数の一様可積分条件で与えることが可能になった。

最後の成果(5)に関しては、より具体的には得られた結果は次のとおりである。(a) 円周の微分同相写像からなる非可換群の各元の微分が指数 $1/2$ より大きいヘルダー連続性をもつとする。このような群が、微分が指数 $1/2$ より大きいヘルダー連続性をもつ微分同相写像によりメビウス変換群に共役になるための必要十分条件は、微分同相写像の単位円板への擬等角拡張の歪曲率が双曲計量に関して一様に2乗可積分となることである。(b) 円周の非可換メビウス変換群が対称写像によって指数一様なヘルダー連続性微分をもつ微分同相写像群に共役となるならば、共役写像は同じ指数のヘルダー連続性微分をもつ微分同相写像で与えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① K. Matsuzaki, Infinite dimensional Teichmüller spaces, modular groups and moduli spaces, Handbook of Teichmüller theory, Volume IV, EMS Publishing House (出版予定) (査読有)
- ② K. Matsuzaki, An estimate of the maximal dilatations of quasiconformal automorphisms of annuli, Complex Var. Elliptic Equ. (出版予定) (査読有)
- ③ E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Non-divergent infinitely discrete Teichmüller modular transformation, Topics in finite or infinite dimensional complex analysis, pp. 97-102, Tohoku Univ. Press, 2013. (査読有)
- ④ E. Fujikawa and K. Matsuzaki, The Nielsen realization problem for asymptotic Teichmüller modular groups, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), 3309-3327. (査読有)
- ⑤ K. Matsuzaki, Petersson series vanishes at infinity, Quasiconformal mappings, Riemann surfaces, and Teichmüller spaces, Contemporary Math. 575 (2012), 299-311. (査読有)
- ⑥ K. Matsuzaki, Polycyclic quasiconformal mapping class subgroups, Pacific

- J. Math. (2011), 361-374. (査読有)
- ⑦ E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Stable quasiconformal mapping class groups and asymptotic Teichmüller spaces, Amer. J. Math. 133 (2011), 637-675. (査読有)
- ⑧ K. Matsuzaki, Properties of asymptotically elliptic modular transformations of Teichmüller spaces, Infinite dimensional Teichmüller space and moduli space, RIMS Kokyuroku Bessatsu B17, pp. 73-84, 2010. (査読有)
- ⑨ K. Matsuzaki, An averaging operator and non-separability of certain Banach spaces of holomorphic automorphic forms, Infinite dimensional Teichmüller space and moduli space, RIMS Kokyuroku Bessatsu B17, pp. 65-72, 2010. (査読有)
- ⑩ E. Fujikawa, K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Structure theorem for holomorphic self-covers and its applications, Infinite dimensional Teichmüller space and moduli space, RIMS Kokyuroku Bessatsu B17, pp. 21-36, 2010. (査読有)
- ⑪ K. Matsuzaki, Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups, Contemporary Math. 510 (2010), 239-247. (査読有)
- ⑫ K. Matsuzaki, The action of elliptic modular transformations on asymptotic Teichmüller spaces, Ramanujan Math. Soc. Lecture Notes Series 10 (2010), 481-488. (査読有)
- ⑬ E. Fujikawa, K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Dynamics on Teichmüller spaces and holomorphic self-covering of Riemann surfaces, Math. Z. 260 (2008), 865-888. (査読有)

[学会発表] (計 20 件)

- ① K. Matsuzaki, Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces, Advances in Teichmüller theory (Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics), 2013/2/6.
- ② K. Matsuzaki, Circle diffeomorphisms and Teichmüller spaces, リーマン面・不連続群研究集会 (大阪大学), 2013/1/14.
- ③ K. Matsuzaki, Conjugation of a group of circle diffeomorphisms, Rigidity

- School 2012-2013, (東京大学), 2013/1/9.
- ④ 松崎克彦, Conjugation of a group of symmetric homeomorphisms of the circle, 函数論シンポジウム (金沢大学), 2012/11/24.
- ⑤ 松崎克彦, 円周の微分同相写像群のメビウス群への共役, 日本数学会秋季総合分科会 (九州大学), 2012/9/18.
- ⑥ K. Matsuzaki, Conjugation of a circle diffeomorphism group to a Möbius group, Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis (昆明理工大学), 2012/7/28.
- ⑦ 松崎克彦, 円周の微分同相写像群のフックス群への微分共役について, リーマン面・不連続群研究集会 (名古屋大学), 2012/1/9.
- ⑧ K. Matsuzaki, Schwarzian derivatives of asymptotically conformal extension of univalent functions, 19th ICFIDCAA in Hiroshima (アステールプラザ広島), 2011/12/12.
- ⑨ K. Matsuzaki, Teichmüller space of a group of symmetric homeomorphisms of a circle, Internatioanal Conference on Analysis (Chinese Academy of Science), 2011/8/17.
- ⑩ E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Asymptotic Nielsen realization problem and stable quasiconformal mapping class group, Teichmüller theory (Oberwolfach Institute), 2010/12/1.
- ⑪ E. Fujikawa, K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Dynamics of holomorphic self-embeddings of Teichmüller spaces, Nevanlinna Colloquium (Kyoto University), 2009/9/10.
- ⑫ K. Matsuzaki, Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups, Geometric Function Theory and Geometry, 2008 Fall Eastern Section Meeting (Wesleyan Univ.), 2008/10/11.
- ⑬ K. Matsuzaki, Asymptotically elliptic modular transformations of Teichmüller space, Complex Analysis and Dynamics Seminar (City Univ. of New York), 2008/10/3.

[図書] (計2件)

- ① K. Matsuzaki and T. Sugawa, Topics in finite or infinite dimensional complex analysis, Tohoku Univ. Press,

2013.

- ② E. Fujikawa, Infinite dimensional Teichmueller spaces and moduli spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu B17, Kyoto Univ., 2010.

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.f.waseda.jp/matsuzak/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松崎 克彦 (MATSUZAKI KATSUHIKO)
早稲田大学・教育総合科学学術院・教授
研究者番号: 80222298

(2) 研究分担者

谷口 雅彦 (TANIGUCHI MASAHIKO)
奈良女子大学・人間文化研究科・教授
研究者番号: 50108974

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)
東北大学・情報科学研究科・教授
研究者番号: 30235858

佐官 謙一 (SAKAN KENICHI)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 70110856

(3) 連携研究者

志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 10154189

中西 敏浩 (NAKANISHI TOSHIHIRO)
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号: 00172354

宮地 秀樹 (MIYACHI HIDEKI)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 40385480

糸 健太郎 (ITO KENTARO)
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 00324400

藤川 英華 (FUJIKAWA EGE)
千葉大学・理学研究科・准教授
研究者番号：80433788