

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2012

課題番号：20340031

研究課題名（和文） 拡散と領域の幾何

研究課題名（英文） Diffusion and Geometry of Domain

研究代表者

坂口 茂（SAKAGUCHI SHIGERU）

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：50215620

研究成果の概要（和文）：広く拡散現象を記述する偏微分方程式を考える。解の挙動と領域の幾何との関係を知るため、初期挙動と境界の曲率との関係および時刻に関して不変な等位面の存在と領域の対称性との関係を明らかにした。特に、不変な等位面による球面、超平面および円柱面の特徴付けが得られ、領域の幾何を決定する逆問題の新展開がなされた。副産物として、ある重要なクラスのワインガルテン超曲面を記述する完全非線形楕円型偏微分方程式の粘性解に対するリュービル型定理が得られた。

研究成果の概要（英文）：Partial differential equations describing diffusion phenomena have been widely considered. To know the relationship between the behavior of solutions and the geometry of domain, we showed both the relationship between the initial behavior and the curvatures of the boundary and that between the existence of a stationary level surface with time and the symmetry of domain. In particular, we obtained characterizations of the sphere, the hyperplane, and the circular cylinder involving a stationary level surface. These yielded a new development of inverse problems determining the geometry of domain. Also, as a by-product, we obtained Liouville-type theorems for viscosity solutions of fully nonlinear elliptic partial differential equations describing an important class of Weingarten hypersurfaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2009年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2010年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2011年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2012年度	2,800,000	840,000	3,640,000
総計	14,800,000	4,440,000	19,240,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：熱方程式，非線形拡散方程式，非線形楕円型方程式，不変な等位面，領域の幾何，球面の特徴付け，超平面の特徴付け，円柱面の特徴付け

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者と Rolando Magnanini 教授 (フィレンツェ大学) との共同による, 熱方程式の解の時刻について不変な等温面や臨界点の約 10 年間に渡る研究があった. 特に, 不変な等温面による球面や超平面の特徴付けの初期段階の結果があり, その一般化や非線形拡散方程式への拡張が期待されていた. また, 熱方程式および遅い拡散の場合の多孔質媒質方程式と  $p$  調和拡散方程式に対する, 初期値を零, 境界値を正定数とする初期境界値問題において, 境界に 1 点で接する領域内の球上の解の空間積分の初期時刻での漸近公式に接点での境界の主曲率が現れる事がわかっていて, この事実はより一般の非線形拡散方程式に対しても成立することが予想されていた. さらに, このような研究は, 偏微分方程式の解の挙動と考える空間領域の幾何との関係を知るという視点に立つことにより更なる発展が期待されていた.

## 2. 研究の目的

主な研究目的は拡散現象を記述する偏微分方程式の解の挙動と領域の幾何の関係を明らかにすることであり, 次の課題について研究する.

- (1) 拡散方程式の解の初期挙動と領域の幾何 (境界の曲率や境界からの距離関数) の関係を明らかにする.
- (2) 拡散方程式の解の不変な等位面及び不変な臨界点の研究を進展させる.
- (3) 広く拡散現象を考慮した偏微分方程式 (楕円型および放物型方程式等) の解の挙動と領域の幾何の関係を調べる.
- (4) 解や領域の形状を決定する逆問題を発掘・設定し, 研究する.

## 3. 研究の方法

普段の研究組織内での研究打合せ (電子メールと必要に応じた直接の打合せ) および必要に応じた国内外の研究協力者との討論・情報交換により研究を進める. そのために以下を実施した.

- (1) 次の研究集会を主催した. 広島応用解析セミナー第 9 回~第 16 回 (東広島), 青葉山勉強会第 7 回・第 8 回 (仙台), RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の幾何」(H24 年 11 月, 京都), 第 1 回伊日ワークショップ (H21 年 6 月, 仙台), 第 2 回伊日ワークショップ (H23 年 6 月, コルトナ, イタリア).

(2) 国内外での研究集会等に参加し, 成果発表・討論・情報交換・情報収集を行った.

(3) フィレンツェ大学へ出張し海外共同研究者 Rolando Magnanini 教授との直接の討論・情報交換を行った.

(4) 海外から有力な研究協力者 (Julian Lopez-Gomez 教授 (スペイン), Xi-nan Ma 教授 (中国), Antoine Henrot 教授 (フランス), Rolando Magnanini 教授 (イタリア)) を日本へ招聘し直接の討論・情報交換を行った.

## 4. 研究成果

主な研究成果は次のようである.

(1) 有界とは限らない境界をもつ領域において, 初期値を零, 境界値を正定数とする非線形一様放物型拡散方程式の初期境界値問題および領域の補集合の特性関数を初期値とする初期値問題を考える. このとき, 解からできるある関数と時刻との積が境界からの距離関数の自乗に初期時刻で収束することを粘性解の理論と比較定理を活用して示した. また, 初期境界値問題については, 境界値を 2 つの正定数の間の値を取る関数に代えても同じ収束が成り立つことを示した. さらに, 境界に 1 点で接する領域内の球上の解の空間積分の初期時刻での漸近公式に接点での境界の主曲率が現れる事を示し, 領域の境界の近傍での解の初期挙動と領域の幾何の関係を明らかにした.

(2) 速い拡散の場合の多孔質媒質方程式と  $p$  調和拡散方程式に対して, 初期境界値問題と初期値問題における解の初期挙動と境界の主曲率の関係を解の初期挙動が対応する非線形楕円型方程式の境界爆発解によって記述されること及びある自己相似解の挙動とを利用して明らかにした (論文準備中).

(3)  $N-1$  次元ユークリッド空間の任意の単位球上の振幅が有界である連続関数のグラフを境界にもつ  $N$  次元空間の領域において, 初期値を零, 境界値を正定数とする熱方程式の初期境界値問題を考えるとき, 不変な等温面が存在すれば境界は超平面に限ることを示した. また, 非線形一様放物型拡散方程式についても, 同様な不変な等位面による超平面の特徴付けの定理をスライディング法を改良し, より広いクラスの領域に対して示した.

(4) 線形および非線形一様放物型拡散方程式の解の不変な等位面による球面の特徴付けの定理を境界が有界であるが滑らかとは限らない一般の領域に対して示した. (以前は

領域に外部球面条件を仮定していた.)

(5) 3次元空間上の熱方程式の初期値問題の解の不変な等温面による円柱面と超平面の特徴付けの定理を埋め込まれた平均曲率一定曲面及び極小曲面の理論を活用して示した(論文準備中).

(6) 超平面の不変な等温面による特徴付けの研究を発展させて,粘性解の理論を活用して,ある重要なクラスのワインガルテン超曲面を記述する完全非線形楕円型偏微分方程式の粘性解に対するリュービル型定理を与えた.つまり,  $N$ 次元空間全体上の任意の単位球上の振幅が有界である連続関数のグラフを表す超曲面がある重要なクラスのワインガルテン超曲面ならばそれは超平面に限ることを示した.

(7) ある準線形楕円型方程式に付随する変分問題を同じ再配分をもつ関数のクラス上で考えて,解の存在,一意性を示し,さらに領域の対称性と解の対称性の関係を明らかにした.

(8) 熱方程式の初期値問題の解が時刻について拡大する相似な等位面の列をもつとき,解は対称性をもつかという逆問題を設定した.特に解の回転対称性について,アレクサンドロフの反射原理を利用して,発端となる結果を得た(論文準備中).

(9) 無限次元の Hamilton Jacobi 方程式の解の長時間漸近挙動の解析,及び, KPZ 方程式の解の新しい定義・存在・一意性について,部分的な結果を得た.これは今後,無限次元空間の拡散と領域の幾何の研究に結びつくと思われる.

(10)  $p$ 調和型退化特異放物型方程式系に対して,弱解のヘルダー評価が成り立つための,係数関数と外力関数に対する最良の可積分条件を得た.これは  $p$ 調和拡散方程式系の初期挙動と領域の幾何の関係の基礎として役立つことが期待される.

(11) 常微分方程式論的手法と変分法を主な解析手段として,非線形常微分方程式の境界値問題の解の漸近挙動の詳細な解析を行った.この手法はより複雑な非線形拡散方程式の自己相似解の挙動の解析に有用であると思われる.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 26 件)

- ① Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, in "The  $p$ -Laplacian Operator and Applications" Oberwolfach Report, 査読無, 2013, 印刷中  
<http://www.emis-ph.org/journals/journal.php?jrn=OWR>
- ② Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Matzoh ball soup revisited: the boundary regularity issue, Mathematical Methods in Applied Sciences, 査読有, 2013, 掲載受理印刷中  
10.1002/mma.1551
- ③ Shigeru Sakaguchi, Stationary level surfaces and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes, in "Geometric Properties of Parabolic and Elliptic PDE's", Springer INdAM Series, Vol.2, 査読有, 2013, pp. 269--282.  
10.1007/978-88-470-2841-8\_17
- ④ Masashi Misawa, A Hölder estimate for nonlinear parabolic systems of  $p$ -Laplacian type, J. Differential Equations, 査読有, 254, 2013, pp. 847--878.  
10.1016/j.jde.2012.10.001
- ⑤ Toshio Mikami, A characterization of the Knothe-Rosenblatt processes by a convergence result, SIAM J. Control Optim., 査読有, 50, 2012, pp. 1903--1920. 10.1137/100791129
- ⑥ Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of bifurcation curve for sine-Gordon type differential equation, Abstract and Applied Analysis, 査読有, 2012, 2012, 16 pages. 10.1155/2012/753857
- ⑦ Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Interaction between nonlinear diffusion and geometry of domain, J. Differential Equations, 査読有, 252, 2012, pp. 236--257.  
10.1016/j.jde.2011.08.017
- ⑧ F. Cuccu, G. Porru, and S. Sakaguchi, Optimization problems on general classes of rearrangements, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 査読有, 74, 2011, pp. 5554--5565.  
10.1016/j.na.2011.05.039
- ⑨ Shigeru Sakaguchi, A Liouville-type theorem for some Weingarten hyper surfaces, Discrete and Continuous Dynamical Systems -Series S, 4, 査読有, 2011, pp. 887--895.

10.3934/dcdss.2011.4.887

- ⑩ Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Nonlinear diffusion with a bounded stationary level surface, *Annales de l'Inst. Henri Poincaré (C) Analyse Non Lineaire*, 27, 査読有, 2010, pp. 937--952.  
10.1016/j.anihpc.2009.12.001
- ⑪ Rolando Magnanini and Shigeru Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces and some characterizations of the hyperplane in the N-dimension al Euclidean space, *J. Differential Equations*, 248, 査読有, 2010, pp. 1112--1119.  
10.1016/j.jde.2009.11.017

[学会発表] (計 78 件)

- ① 坂口 茂, 不変等温面と領域の幾何, 日本数学会年会 (解析学賞受賞特別講演), 2013 年 3 月 21 日, 京都大学
- ② Shigeru Sakaguchi, Fast diffusion and geometry of domain, Oberwolfach Mini-Workshop 「The p-Laplacian Operator and Applications」 2013 年 2 月 14 日, ドイツ・Oberwolfach 数学研究所
- ③ 坂口 茂, Stationary isothermic surfaces in Euclidean 3-space, 愛媛大学解析セミナー第 100 回記念講演, 2012 年 11 月 30 日, 愛媛大学
- ④ 坂口 茂, Stationary isothermic surfaces and geometry of domain, 第 4 回名古屋微分方程式研究集会, 2012 年 3 月 5 日, 名古屋大学
- ⑤ 坂口 茂, Nonlinear diffusion and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes I, II, RIMS 共同研究「非線形拡散の数理」, 2012 年 2 月 14 日, 京都大学
- ⑥ 坂口 茂, Stationary isothermic surfaces and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究」, 2012 年 1 月 24 日, 京都大学
- ⑦ 坂口 茂, 超平面を特徴づける Liouville 型定理, 第 9 回浜松偏微分方程式研究集会, 2011 年 12 月 26 日, 静岡大学
- ⑧ 坂口 茂, Stationary isothermic surfaces and Liouville-type theorems characterizing hyperplanes, Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2011 年 12 月 20 日, 東北大学
- ⑨ 坂口 茂, Stationary level surfaces under low regularity assumption on the domain, 日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 29 日, 信州大学

⑩ 坂口 茂, Stationary level surfaces under low regularity assumption on the domain, 第 7 回非線形の諸問題, 2011 年 9 月 24 日, 熊本大学

⑪ 坂口 茂, Stationary level surfaces and Liouville-type theorems, Diffusion phenomena and the related topics for maximum points and singularities, The 4th MSJ-SI, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011 年 9 月 12 日, 九州大学

⑫ Shigeru Sakaguchi, Diffusion with similar level sets, BIRS Workshop "Geometric properties of solutions of nonlinear PDEs and their applications", 2011 年 7 月 18 日, カナダ・バンフ

⑬ Shigeru Sakaguchi, Level surfaces, Liouville-type theorems and the hyperplane, 2nd Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2011 年 6 月 22 日, イタリア・コルトナ

⑭ 坂口 茂, 非線形拡散と領域の幾何, 日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学

⑮ Shigeru Sakaguchi, Nonlinear diffusion and geometry of domain, The 8<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010 年 5 月 27 日, ドイツ・ドレスデン工科大学

⑯ Shigeru Sakaguchi, Nonlinear diffusion and geometry of domain, RIMS 研究集会「現象解析と関数方程式の新展望」, 2009 年 11 月 19 日, 京都大学

⑰ Shigeru Sakaguchi, A Liouville-type theorem for some Weingarten hypersurfaces, Nonlinear Evolution Equations and Related Topics, 2009 年 10 月 10 日, 早稲田大学

⑱ Shigeru Sakaguchi, A Liouville-type theorem for some Weingarten hypersurfaces, 1<sup>st</sup> Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2009 年 6 月 17 日, 東北大学

⑲ Shigeru Sakaguchi, Diffusion and stationary level surfaces, 第 5 回世界非線形解析学会議 (WCNA 2008), 2008 年 7 月 5 日, 米国・オーランド

⑳ Shigeru Sakaguchi, Stationary isothermic surfaces and some characterizations of the hyperplane, RIMS 研究集会「微分方程式の粘性解とその周辺」, 2008 年 6 月 25 日, 京都大学

〔図書〕(計 1 件)

① Rolando Magnanini, Shigeru Sakaguchi, Angelo Alvino, *Editors*, *Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's*, Springer INdAM Series 2, Springer 2013, pp. 1--292.

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/sigersak2012415/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坂口 茂 (SAKAGUCHI SHIGERU)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：50215620

### (2) 研究分担者

三沢 正史 (MISAWA MASASHI)  
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号：40242672

三上 敏夫 (MIKAMI TOSHIO)  
広島大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：70229657

柴田 徹太郎 (SHIBATA TETSUTARO)  
広島大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：90216010

観音 幸雄 (KANON YUKIO)  
愛媛大学・教育学部・教授  
研究者番号：00177776  
(H21→H24：連携研究者)

### (3) 連携研究者

川上 竜樹 (KAWAKAMI TATSUKI)  
大阪府立大学・大学院工学研究科・講師  
研究者番号：20546147

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：90272020

小川 卓克 (OGAWA TAKAYOSHI)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：20224107