

機関番号：32689

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2008～2011

課題番号：20340037

研究課題名 (和文) 変分的アプローチによる非線型問題の総合的研究

研究課題名 (英文) Variational study of nonlinear problems

研究代表者

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20188288

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線型楕円型方程式，特異摂動問題，ハミルトン系

1. 研究計画の概要

非線型微分方程式は数理物理学，微分幾何学に現れ，その解の存在，多重性，安定性は重要な問題である．ここでは変分的アプローチにより次の問題に取り組む．

- (1) 特異摂動問題．非線型シュレディンガー方程式を中心として，凝集解のプロファイルおよびその存在．
- (2) 非線型楕円型方程式系．変分構造をもつ方程式系の解の存在問題および特異摂動問題．
- (3) 天体力学に関連するハミルトン系に対する周期軌道の存在問題．

2. 研究の進捗状況

(1) 非線型シュレディンガー方程式に関して，非線型項をべき関数等に限ることなく一般的な非線型項をもつ方程式を扱い，ポテンシャル $V(x)$ の位相的に安定な臨界点に凝集する特異摂動解および $V(x)$ の極大点に集中する複数個のピークをもつ特異摂動解の存在証明に成功した．この設定の下では極限方程式の解の一意性，非退化性は期待できず，Lyapunov-Schmidt 法は適用が難しい．ここでは方程式に対応する汎関数を無限次元関数空間において詳細に調べ，標準的なものとは異なる gradient flow を構成，適用することにより証明を与えた．ここで開発された方法は極限問題の解空間の構造が一般に複雑な方程式系に対するさらなる応用が期待される．

(2) 非線型楕円型方程式系に関しては (i) 非線型シュレディンガー方程式系に対する特異摂動問題，(ii) 方程式系に対する球対称解の存在問題を扱った．

(i) については比較的弱い相互作用をもつ連

立非線型シュレディンガー方程式系に対して従来知られていないプロファイルをもつ凝集解の存在証明に成功した．得られた解の凝集点は 2 つのポテンシャルから定まるある種のエネルギー関数の極小点として特徴付けられ，解に rescale を施すと極限として極限方程式のベクトル値解が現れる．

(ii) については変分構造をもつ定数係数問題を取り上げ球対称解の存在を議論した．方程式のもつスケール不変性を活用した Palais-Smale 性を得るための新しい手法を提案，導入することにより証明を与えた．ここで与えた方法は制約問題を用いない証明および拡張を与えており，変数係数の問題等への拡張がしやすい形となっている．

(3) 天体力学に関連するハミルトン系に関しては，対称性の仮定の下で N 体問題の周期軌道の存在を考え，非衝突周期軌道および従来行われてこなかった衝突周期軌道の変分的存在証明を中心に研究を行っている．

3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している．

(1)，(2) については種々の存在定理を得，当初の計画以上の進展をみた．特に特異摂動問題に対しては新しい flow の構成により，非常に一般的な非線型性に対して存在定理を示した．さらにその方法は他の方程式系に対する応用が期待されている．

(3) については種々の対称性の仮定の下で N 体問題の周期軌道の存在証明に取り組んだが未だ存在証明に成功していない．しかし，衝突解の変分的アプローチによる存在証明等に関して新たな知見が得られ，これからの発展が期待できる．

4. 今後の研究の推進方策

(1), (2) に関しては, 非常に一般的な非線型性を持つ非線型シュレディンガー方程式の凝集解の存在証明に成功する等, 当初の予定以上の成果を得た. 来年度においては議論をさらに発展させポテンシャルの鞍点において複数個のピークが集中する clustered 解の存在証明を目指し, さらに方程式系 (システム) に対する応用を目指す.

(3) については引き続き対称性の仮定の下で周期軌道の存在証明を目指す. その際, 古典的にも興味ある対象である衝突解の変分的構成も同時に考え, 衝突解, 非衝突解の存在メカニズムの統一的理解を目指す.

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

1. N. Ikoma and K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, Calc. Var. Partial Diff. Eq. 40 (2010), 449–480. 査読有.
2. J. Hirata, N. Ikoma and K. Tanaka, Nonlinear scalar field equations in \mathbb{R}^N ; mountain pass and symmetric mountain pass approaches, Topological Method Nonlinear Anal. 35 (2010), 253–276. 査読有
3. Y. Sato and K. Tanaka, Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), 6205–6253. 査読有
4. P. Felmer, S. Martinez and K. Tanaka, Highly oscillatory behavior of the activator in the Gierer and Meinhardt system, Math. Ann. 340 (2008), 749–773. 査読有.
5. J. Byeon, L. Jeanjean and K. Tanaka, Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases, Comm. Partial Diff. Eq. 33 (2008), 1113–1136. 査読有.
6. Y. Sato, Sign-changing multi-peak solutions for nonlinear Schrödinger equations with critical frequency. Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), no. 4, 883–903. 査読有.

[学会発表] (計 12 件)

1. K. Tanaka, Mountain pass and symmetric mountain pass approaches to nonlinear scalar field equations and related problems, Conference On Nonlinear PDE's, October. 5–8, 2010, POSTECH, Korea.
2. K. Tanaka, Positive solutions for a

singularly perturbed system of nonlinear Schrödinger equations, Workshop on Variational Methods in Nonlinear Differential Equations, 17–22 October, 2010, Oaxaca, Mexico.

3. T. Ozawa, Analytic smoothing effect for nonlinear Schrödinger equations, 8th AIMS Conference, May 28, 2010, Dresden.

4. K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, International Conference on Variational Methods, May 22, 2009, Nankai University, Tianjin, China.

5. K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, The 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, July 18, 2009, 東北大学, 仙台.

6. K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, The 2nd Chile-Japan workshop on nonlinear elliptic and parabolic PDE's, Dec. 2, 2009, 明治大学, 東京.

7. M. Otani, Infinite dimensionality of global attractors for parabolic equations governed by p-Laplacian in heterogeneous medium, Current advances in applied nonlinear analysis and mathematical modeling, May 18–21, 2009, Warsaw.

[図書] (計 1 件)

1. 田中和永, 変分問題入門—非線型楕円型方程式とハミルトン系—, 岩波書店, 2008, 271 ページ.