

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年10月31日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20340037

研究課題名（和文） 変分的アプローチによる非線型問題の総合的研究

研究課題名（英文） A comprehensive study of nonlinear problems via variational approaches

研究代表者

田中 和永（TANAKA KAZUNAGA）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20188288

研究成果の概要（和文）：

非線型問題の研究を変分的手法により行った。特に(1) 非線型シュレディンガーおよびその連立系に対する特異摂動問題に関して凝集解の変分的構成を行い、非常に一般的な設定の下でその存在を示した。(2) 非線型楕円型方程式（系）の解の存在を種々の設定の下で扱い、解の新しい変分的構成を与えた。また解の安定性、不安定性の研究を行った。(3) 空間次元 1 の特異摂動問題においては高振動解の特徴付けと存在結果を与えた。

研究成果の概要（英文）：

We study nonlinear problems via variational approaches. Especially (1) we study singular perturbation problems for nonlinear Schrödinger equations and systems. We introduce a new purely variational method which enables us to construct concentrating solutions in a very general setting. (2) We study nonlinear elliptic equations and systems in various settings. We give a new variational construction of radially symmetric ground states. We also study stability and instability of solutions. (3) We also study highly oscillatory solutions in 1-dimensional singular perturbation problems. We give characterization and existence result.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|------------|-----------|------------|
| 2008年度 | 4,000,000 | 1,200,000 | 5,200,000 |
| 2009年度 | 3,600,000 | 1,080,000 | 4,680,000 |
| 2010年度 | 3,200,000 | 960,000 | 4,160,000 |
| 2011年度 | 2,800,000 | 840,000 | 3,640,000 |
| 年度 | | | |
| 総計 | 13,600,000 | 4,080,000 | 17,680,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，大域解析学

キーワード：変分問題，非線型楕円型方程式，特異摂動問題，ハミルトン系

1. 研究開始当初の背景

非線型微分方程式は数理物理学，微分幾何学における種々な問題に現れ，その解の存在，多重性，安定性，不安定性は非常に重要な問題である。このような問題の中でも最も重要なクラスは変分構造を持つ非線型微分方程

式であり，その深い理解が待たれている。ここでは主たる研究対象である非線型楕円型方程式に対する特異摂動問題，解の構造について述べる。

(1)特異摂動問題.

非線型楕円型方程式にする特異摂動問題は

Floer-Weinstein の 1986 年の研究以来, 非常に多くの研究がなされており, ポテンシャル $V(x)$ の臨界点に集中する凝集解が構成される等, 非常に興味ある結果が得られているが, その存在証明には **Lyapunov-Schmidt** 法が用いられ, その適用範囲は限定されていた. 特に方程式系に対する適用は難しい状況であった.

(2)非線型楕円型方程式系の解構造.

単独の方程式と比べると連立系の研究はまだ進んでいない. 非線型楕円型方程式系は数理物理モデル等に現れ, その基底状態等に対応する解は非常に重要であり, その変分的解析が待たれている.

2. 研究の目的

非線型楕円型方程式(系) に対して変分的アプローチを中心とした切り口として以下の問題を中心に研究を行った.

(1) 特異摂動問題の研究.

特異摂動問題は本研究の主要なテーマのひとつであり, 数理物理, 数理生物モデル等とも深い関連を持つ.

①非線型シュレディンガー方程式に対する特異摂動問題.

非線型項がべき関数のときは対応する極限問題の解の一意性, 非退化性が知られており, **Lyapunov-Schmidt** 法が適用できる. しかし一般的な非線型項 $f(u)$ を持つ方程式に対しては極限問題の解の一意性, 非退化性が知られておらず, その方法は適用できない. ここでは **Lyapunov-Schmidt** 法に頼らない凝集解の構成方法を開発する.

②非線型楕円型方程式(系)に対する特異摂動問題.

特異摂動問題は極限方程式の解構造が複雑である等の難しさから, 今まで凝集解の構成はあまりなされていなかった. ①で開発する手法を発展させることにより方程式系の凝集解の構成を行う.

③高振動解のプロファイルおよび存在問題.

空間次元が 1 の場合にはさらに複雑な peak の数が特異摂動パラメーターが 0 へ近づくと無限大と発散するような解の解析が可能となる. ここでは **adiabatic invariant** に関連する量を用いたプロファイルの記述および **admissible** なプロファイルに対して対応する高振動解の構成を行う.

(2)非線型楕円型方程式(系) に対する解構造の研究.

非線型スカラーフィールド方程式の存在から研究を始め, 数理物理に現れる具体的な方程式系に対してその **ground state** 解の存在問題および解の安定性, 非安定性の解析を行う.

(3)天体力学における変分問題の研究.

ハミルトン系の周期軌道の存在も重要な変

分問題のひとつである. ここでは今までの研究代表者の研究を踏まえ, 天体力学に関連して現れる周期問題に対して軌道安定な周期軌道の存在証明を目指す.

3. 研究の方法

早稲田大学理工学術院に研究の中心拠点を置き研究活動を行った. その際, 定期的に開催している応用解析研究会, 変分問題セミナーを代表者, 分担者, 連携研究者間の研究連絡を行う場として重視した. また海外の研究者との研究交流を重視し, 特に J. Byeon 教授 (Postech, 韓国), P. Felmer 教授 (Univ. Chile), L. Jeanjean 教授 (Univ. Besancon, France) と共同研究を行った.

4. 研究成果

次の研究成果を得た.

(1) 特異摂動問題の研究.

①非線型シュレディンガーに対する特異摂動問題の研究.

一般的な非線型項 $f(u)$ を持つ非線型シュレディンガー方程式に対して, J. Byeon 氏と共に新たに局所化した変分的な解の構成法を開発し, 極限問題の解の一意性, 非退化性を全く仮定することなく (要求される性質は極限問題の解集合の平行移動を除いたコンパクト性のみである) 凝集解の構成を行うことに成功した (J. Eur. Math. Soc. 掲載予定). ポテンシャルの臨界点に集中する凝集解の存在を示したのみならず, さらに臨界点のが極大点あるいは鞍点の場合には 1 点に複数の peak が集中する clustering 解をも構成した (Mem. Amer. Math. Soc. 掲載予定). このような解は極限方程式に関する強い仮定の下で **Lyapunov-Schmidt** 法によって有限次元の問題に帰着することによってのみ従来得られていた結果であり, このような結果を有限次元近似を経ずに無限次元解析により導出したことは画期的である. なお, ここで開発したアイデアは非常に応用範囲が広く, 方程式系等に対する特異摂動問題への広範な適用が期待される. その一端は次の②で見ることができる. 他の応用として expanding domain (S を \mathbb{R}^n 内の閉曲面とするとき $\Omega_t = \{x \mid \text{dist}(x, S) < 1\}$ と表される領域) 内の正值解の多重度を扱った. 従来は **Lyapunov-Schmidt** 法により研究がなされ, 極限問題の解に対する一意性, 非退化性の仮定の下で (この仮定は一般に 3 次元以上の場合正しいか否かチェックされていない) 議論されていたが, 今回開発されたアプローチによりこのような仮定なしで多重度が議論が可能であり, t と共に正值解の数は無限大となることを示すことに成功している. 今回開発した方法の他の問題への応用および凝集解の存在を示すための一般論としての確

立を目指して現在さらに研究を進めている。
②非線型楕円型方程式(系)に対する特異摂動問題.

研究の背景で述べたように、特異摂動問題の研究は方程式系に対しては Lyapunov-Schmidt 法が一般に適用できないため、あまり進んでいない状態であり、ある種の対称性を仮定した方程式系が主に研究されていた。ここではまず比較的簡単な構造を持つ方程式系として2本の非線型シュレディンガー方程式系からなる連立系に対して、凝集解の存在を研究し、その存在を方程式系の対称性等を仮定せずに示すことに成功した (Calc. Var. Partial Diff. Eq. 2011)。この問題においては、2つのポテンシャルが現れ、それらの相互作用により定まるある種の極小点に集中する凝集解が見いだされており、システムとしての問題の複雑さも明らかにしている。(システムにおいてはポテンシャルの臨界点がシステムとして興味ある解の凝集点となっているとは限らない)。極大点、鞍点での凝集解の存在も期待され興味深い問題である。このような凝集解の存在は引き続き解析を行っていきたい。なお Gierer-Meinhardt 系等の凝集解の存在問題を倉田が、cross-diffusion を伴う Lotka-Volterra 方程式系に対するある種の特異極限問題の研究を山田が行った。

③1次元での特異摂動問題に対する高振動解の研究.

Adiabatic invariant に関連する量を用いた高振動解のプロファイルの記述および admissible なプロファイルに対応する高振動解の存在証明を外力項を伴う振り子の方程式に対して代表者が、P. Felmer 氏、S. Martinez 氏と共に行った。得られた結果は振り子の回転数と adiabatic invariant がある種のメモリー効果を持って関連するものであり力学系としても興味ある現象を見いだしている。

(2) 非線型楕円型方程式(系)の解構造の研究.

非線型スカラーフィールド方程式に関する ground state 解の存在に関する基本的な存在定理に関してスケーリングプロパティを活用した変分的証明を与えた (Top. Meth. Nonl. Anal. 2010)。この方法は制限問題を用い行われていた従来の方法とは異なり、関数空間 H^1 上で定義された汎関数そのものを用いた直接的なアプローチである。さらに存在結果も既存の結果より若干一般的なものを与えている。また空間変数 x に依存した問題等へのアプローチもある程度可能としている。なおこの方法は柱状領域での非線型楕円型方程式等への応用も可能である (Adv. Nonl. Anal. 掲載予定)。

また数理物理に現れる2次相互作用を持つ

非線型シュレディンガー方程式系の研究を小澤、田中が行った (Ann. Inst. H. Poincaré 掲載予定)。ここでは ground state 解の存在を変分法を用いて解析し、次いで発展問題を考察し、ground state 解の大きさが初期値問題の解が大域解となるかあるいは爆発解となるかのしきい値を与えることを見いだしている。このような結果は単独の方程式に対しては M. Weinstein により見いだされていたが、同様の結果が方程式系に対しても得ることに成功した。

なお、非線型シュレディンガー方程式系に対する semi-positive 解の存在問題を佐藤が、準線型シュレディンガー方程式の ground state 解の存在および一意性を足達が示した。

(3) 天体力学における変分問題の研究.

関口が等質量の N -体問題の collision を持つ周期解 (choreographic 解) の構成を行った。なお目標とした軌道安定な2体問題の周期解の構成については残念ながら十分な存在結果を得ることができなかった。このテーマは今後の研究課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 50 件)

- (1) J. Byeon, K. Tanaka, Semiclassical standing waves with clustering peaks for nonlinear Schrödinger equations, *Memoir Amer. Math. Soc.* (掲載予定)(査読有)
- (2) J. Byeon, K. Tanaka, Semi-classical standing waves for nonlinear Schrödinger equations at structurally stable critical points of the potential, *J. Eur. Math. Soc.* (掲載予定)(査読有)
- (3) J. Byeon, K. Tanaka, Nonlinear elliptic equations in strip-like domains, *Advanced Nonlinear Studies* (掲載予定)(査読有)
- (4) N. Hayashi, T. Ozawa, K. Tanaka, On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction, *Annal. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire* (掲載予定)(査読有)
- (5) Z.-Q. Wang, Y. Sato, On the multiple existence of semi-positive solutions for a nonlinear Schrödinger system, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* (掲載予定)(査読有)
- (6) J. Harada, M. Otani, Multiple solutions for semilinear elliptic equations with nonlinear boundary

- conditions, *Electron. J. Diff. Eq.* 2012, No. 33, 9 pp. (査読有)
- (7) K. Kuto, Y. Yamada, On limit systems for some population models with cross-diffusion, *Discrete Contin. Dyn. Systems Series B*, 17 (2012), 2745-2769. (査読有)
- (8) S. Adachi, T. Watanabe, Asymptotic properties of ground states of quasilinear Schrödinger equations with H^1 -subcritical exponent, *Adv. Nonlinear Stud.* 12 (2012), 255-279. (査読有)
- (9) S. Adachi, T. Watanabe, Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.* 75 (2012), no. 2, 819-833. (査読有)
- (10) N. Ikoma, K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 40 (2011), 449-480. (査読有)
- (11) Y. Cho, T. Ozawa, Y.-S. Shim, Invariant elliptic estimates, *J. Math. Anal. Appl.* 382 (2011), 162-171. (査読有)
- (12) J. Harada, S. Hashimoto, M. Otani, H^2 -solutions for some elliptic equations with nonlinear boundary conditions. *Adv. Math. Sci. Appl.* 21 (2011), no. 2, 435-446. (査読有)
- (13) M. A. Efendiev, M. Otani, Infinite-dimensional attractors for parabolic equations with p -Laplacian in heterogeneous medium, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 28 (2011), 565-582. (査読有)
- (14) Y. Kaneko, Y. Yamada, A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in ecology, *Adv. Math. Sci. Appl.* 21 (2011), 467-492. (査読有)
- (15) S. Adachi, T. Watanabe, G -invariant positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation, *Adv. Differential Equations* 16 (2011), no. 3-4, 289-324. (査読有)
- (16) K. Kurata, K. Morimoto, Existence of multiple spike stationary patterns in a chemotaxis model with weak saturation, *Disc. Contin. Dyn. Syst.* 31 (2011), 139-164. (査読有)
- (17) K. Kuto, Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with large cross-diffusion, *Appl. Anal.*, 89 (2010), 1037-1066. (査読有)
- (18) J. Hirata, N. Ikoma, K. Tanaka, Nonlinear scalar field equations in R^N : mountain pass and symmetric mountain pass approaches, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 35, (2010), 253-276. (査読有)
- (19) Y. Sato, K. Tanaka, Sign-changing multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations with steep potential wells, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361 (2009), 6205-6253. (査読有)
- (20) Y. Cho, T. Ozawa, Y.-S. Shim, Elliptic estimates independent of domain expansion, *Calc. Var. PDE*, 34 (2009), 321-339. (査読有)
- (21) Y. Cho, T. Ozawa, Sobolev inequalities with symmetry, *Commun. Contemp. Math.* 11 (2009), no. 3, 355-365. (査読有)
- (22) T. Ozawa, H. Sasaki, Inequalities associated with dilations, *Commun. Contemp. Math.* 11 (2009), 265-277. (査読有)
- (23) J. Harada, M. Otani, Semilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, *Nonlinear Anal.* 71 (2009), e2965-e2968. (査読有)
- (24) J. Harada, M. Otani, H^2 -solutions for some elliptic equations with nonlinear boundary conditions, *Discrete Contin. Dyn. Syst. 2009, Dyn. Sys. Diff. Eq. Appl.* 7th AIMS Conference, suppl., 333-339. (査読有)
- (25) Y. Yamada, Global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with cross-diffusion, *Recent Progress on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions*, edited by Yihong Du, Hitoshi Ishii and Wei-Yueh Lin, pp. 282-299, World Scientific Publ., Hackensack, NJ, 2009. (査読有)
- (26) K. Kuto, Y. Yamada, Limiting characterization of stationary solutions for a prey-predator model with nonlinear diffusion of fractional type, *Diff. Integral Eq.* 22 (2009), 725-752. (査読有)
- (27) Y. Du, Y. Yamada, On the long-time limit of positive solutions to the degenerate logistic equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 25 (2009), 123-132. (査読有)
- (28) S. Kawashima, K. Kurata, Hardy type inequality and application to the stability of degenerate stationary waves, *J. Funct. Anal.* 257 (2009),

- 1-19. (査読有)
- (29) Y. Sato, Sign-changing multi-peak solutions for nonlinear Schrödinger equations with critical frequency, *Commun. Pure Appl. Anal.* 7 (2008), no. 4, 883-903. (査読有)
- (30) P. Felmer, S. Martínez, K. Tanaka, Uniqueness of radially symmetric positive solutions for $-\Delta u + u = u^p$ in an annulus, *J. Diff. Eq.*, 245 (2008), 1198-1209. (査読有)
- (31) J. Byeon, L. Jeanjean, K. Tanaka, Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases, *Comm. Partial Diff. Eq.*, 33 (2008), 1113-1136. (査読有)
- (32) P. Felmer, S. Martínez, K. Tanaka, Highly oscillatory behavior of the activator in the Gierer and Meinhardt system, *Math. Ann.* 340 (2008), 749-773. (査読有)
- (33) Y. Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra Systems with cross-diffusion, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, 6, 411-501, Edited by M. Chipot, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008. (査読有)
- (34) R. Fukuizumi, M. Ohta, T. Ozawa, Nonlinear Schrödinger equation with a point defect, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 25 (2008), 837-845. (査読有)
- (35) K. Kurata, K. Morimoto, Construction and asymptotic behavior of multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, *Commun. Pure Appl. Anal.* 7 (2008), 1443-1482. (査読有)
- (36) K. Kurata, N. Shioji, Compact embedding from $W^{1,2}(\Omega)$ to $L^{q(x)}(\Omega)$ and its application to nonlinear elliptic boundary value problem with variable critical exponent, *J. Math. Anal. Appl.* 339 (2008), 1386-1394. (査読有)
- (37) K. Kurata, J. Shi, Optimal spatial harvesting strategy and symmetry-breaking, *Appl. Math. Optim.* 58 (2008), no. 1, 89-110. (査読有)

[学会発表] (計 20 件)

- (1) 佐藤洋平, 連立非線型楕円型方程式の半正値解の多重存在について, 第4回福島楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2012年1月28日, 福島大学

- (2) T. Ozawa, A sharp bilinear estimate for Klein-Gordon equation, *Evolution equations, related topics and application*, 2011年3月23日, 早稲田大学.
- (3) M. Otani, On Brinkman-Forchheimer equations of flow in double-diffusive convection, *Dutch-Japanese workshop*, 2011年11月8日, アイントホーフェン, オランダ.
- (4) K. Tanaka, Mountain pass and symmetric mountain pass approaches to nonlinear scalar field equations and related problems, *Conference On Nonlinear PDE's*, 2010年10月5日, POSTECH, Korea.
- (5) K. Tanaka, Positive solutions for a singularly perturbed system of nonlinear Schrodinger equations, *Workshop on Variational Methods in Nonlinear Differential Equations*, 2010年10月22日, Oaxaca, Mexico.
- (6) Y. Yamada, On limit systems for some population models with cross-diffusion, *Workshop on PDE Models of Biological Processes*, 2010年12月17日, National Center of Theoretical Sciences (NCTS), Hsinchu, Taiwan.
- (7) K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrodinger equations, *International Conference on Variational Methods*. 2009年5月22日, Nankai University, Tianjin, China.
- (8) K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrodinger equations, *The first Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDEs*, 2009年6月18日, 東北大学.
- (9) K. Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrodinger equations, *The second Chile-Japan workshop on nonlinear elliptic and parabolic PDEs*, 2009年12月2日, 明治大学.
- (10) M. Otani, Infinite dimensionality of global attractors for some quasilinear parabolic equations, *The second Chile-Japan workshop on nonlinear elliptic and parabolic PDEs*, 2009年12月4日, 明治大学.
- (11) M. Otani, Infinite dimensionality of global attractors for parabolic equations governed by p-Laplacian in

heterogeneous medium, Current advances in applied nonlinear analysis and mathematical modeling, 2009年5月18日, Warsaw.

- (12) Y. Yamada, Limiting behavior of solutions for some reaction-diffusion systems with nonlinear diffusion, World Congress of Nonlinear Analysts 2008, 2008年7月3日, Orlando, Florida, USA.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288

(2) 研究分担者

小澤 徹 (OZAWA TOHRU)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70204196
(H20 連携研究者)

大谷 光春 (OTANI MITSUHARU)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：30119656
(H20 連携研究者)

(3) 連携研究者

西田 孝明 (NISHIDA TAKAAKI)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70026110
(H20)

山崎 昌男 (YAMAZAKI MASAO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20174659

山田 義雄 (YAMADA YOSHIO)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825

柳田 英二 (YANAGIDA EIJI)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：80174548

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：10186486

足達 慎二 (ADACHI SHINJI)
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：40339685

平田 潤 (HIRATA JUN)
早稲田大学・理工学術院・助手
研究者番号：10580483
(H22-H23)

関口 昌由 (SEKIGUCHI MASAYOSHI)
木更津工業高等専門学校・基礎学系・教授
研究者番号：30236088