

機関番号：13904

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20500009

研究課題名（和文）

離散最適化における、異種解決アプローチの融合によるアルゴリズム論の展開

研究課題名（英文）

Developing the Algorithm Theory for Combinatorial Optimization based on Hybrid Approaches

研究代表者

藤戸 敏弘 (FUJITO TOSHIHIRO)

豊橋技術科学大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：00271073

研究成果の概要（和文）：

1. 木被覆問題の近似可能性については、無向グラフにおける解明は一応の決着が見られているのに対し、有向グラフにおいては未解明であった。本研究では、入力を層別グラフに制限することで、有向木被覆問題の近似保証は（P=NP でない限り） $\Omega(\log n)$  となり、と同時に、 $k$  層層別グラフでは  $O(\log^{k+1} n)$  倍近似可能であることを示した。
2. グラフ理論における基本問題である独立集合問題は、重要なグラフクラスである  $d$ -claw free グラフにおいて、自然な局所探索法により  $(d-1+\epsilon)/2$  倍近似（ただし、 $\epsilon > 0$ ）できることが知られている。一方、グラフの頂点に任意の重みを許すと、変則的局所探索法が現在最良の近似アルゴリズムであり、 $\Omega(n^d)$  時間  $d/2$  倍近似、もしくは任意の  $d$  で  $2(d-1)/3$  倍近似が可能である。本研究では、頂点重み分布に制限のある条件下で、同問題に対する標準的局所探索法の有効性を検証し、その結果、異なる重みの比が大きい（つまり  $>(3/2)(1+1/(d-1))$ ）場合、すべての重みが 1 以上 2 未満である場合、およびこれら二つの場合を統合したケースのそれぞれで、従来の近似精度保証を改善できることを示した。
3. 基本オンライン問題である古典的スキーレンタル問題を一般化した多状態スキーレンタル問題について、与えられたインスタンスに対し達成可能な最適戦略の競合比を最適競合比として定義する。本研究では、この最適競合比の下限は、プレイヤーの選択肢の数を  $k+1$  個とすると  $(k+1)^k / ((k+1)^k - k^k)$  であり、よって、いかなるインスタンスに対し最適戦略をとっても、競合比は  $e/(e-1)$  より小さくできないことを示した。また、状態数を 3 つに限定すると上限は 2.47 であり、選択肢を 4 つに限定すると上限は 2.75 であることも示した。

研究成果の概要（英文）：

1. The tree cover problem is well studied and known to be approximable within a factor of 2 when given graphs are unweighted, whereas almost nothing is known about its approximability for directed graphs. This study considers the tree cover problem on directed layered graphs, and shows that, while it is  $\Omega(\log n)$  approximation hard, it can be approximated within  $O(\log^{k+1} n)$  factor for graphs with  $k$  layers.
2. The independent set problem in graphs is such an NP-hard problem that is known to be hard even to approximate effectively in polynomial time. When graphs are restricted to be  $d$ -claw free, while the standard local search heuristic can approximate it within a factor of  $(d-1+\epsilon)/2$  ( $\epsilon > 0$ ) in the unweighted case, the best performance guarantee known for general weight instances is due to the  $\Omega(n^d)$  time  $d/2$ -approximation algorithm, or the  $2(d-1)/3$ -approximation algorithm running in polynomial time for any  $d$ . Either algorithm is based on the non-standard local search. This study shows the effectiveness of the standard local search for  $d$ -claw free instances under constrained weight distributions.
3. The multislope ski-rental problem is an extension of the classical ski-rental problem. We define the best possible competitive ratio as that of the best strategy for a given

instance, and analyze its infimum and supremum over arbitrary instances. It is shown that for the  $(k+1)$ -slope problem, the infimum is  $(k+1)^k / ((k+1)^k - k^k)$ , implying that the competitive ratio can be no better than  $e / (e-1) \doteq 1.58$  no matter how many options the player may have. It is also shown that the supremum is 2.47 for  $k = 2$  and 2.75 for  $k = 3$ .

#### 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論

#### 1. 研究開始当初の背景

アルゴリズム理論がこれまで計算機科学の根幹をなし、その基盤技術の発展に寄与することで、今日の情報化 IT 社会の隆盛を支えてきたことは間違いない。と同時に今日では、情報化ネットワーク社会において解決を迫られる問題は大規模化／分散化の一途をたどり、しかもより広汎に情報化が社会に浸透するにつれ、従来対象としてこなかった、電子商取引やネットオークションなどの分野でも計算機処理による解決が求められている。つまり、1970年代にその理論が確立されて以来、効率的計算に立ちほだかる NP 完全性、NP 困難性といった計算困難性が広く認識されてきたが、今日の計算環境では、問題解決に必要な情報はすべて予め与えられるといった前提が崩れたり、情報は十分でも大規模過ぎて実際に（最適）解を厳密に計算することが不可能となるケースが急増している。その結果、より複合的な計算困難性がより広範囲に蔓延するという事態が生じており、教科書的设计術だけでは到底対処できない状況が飛躍的に増加している。

近似アルゴリズムは、元々オペレーションズ・リサーチ (OR) において古くから研究されてきたが、90年代に入り、画期的な PCP (確率的検証可能証明) 理論が確立される際にもたらされた近似度の下限証明技術や、Goemans と Williamson の半正定値計画法 (SDP) に基づく設計法などが立て続けに発見され、今日の隆盛に至っている。系統的設計技法として、線形計画を利用した確率的丸め法や主双対法が知られている。“将来の入力” という未知情報に対処することが求められるオンラインアルゴリズムでは、80年

代に Sleator と Tarjan が競合比に基づく性能評価を提唱して以来、競合比解析を用いたオンラインモデルでのアルゴリズム理論を中心に、その開拓が推し進められてきたといえる。数理計画法では、線形計画に対する著名な単体法や内点法、凸計画に対する楕円体法、整数計画問題に対する汎用解法など、重要な理論的成果が多く得られているが、計算困難問題に対する理論的究明は十分とはいえない。一方、分枝限定法や分枝切除法などの最適化技術にも多分に工学的要素が含まれており、更にシミュレーテッド・アニーリング (SA)、遺伝的アルゴリズム (GA)、局所探索など様々なメタヒューリスティクスによる最適化技術は、正に工学的アプローチの産物といえる。

#### 2. 研究の目的

本研究では、特に離散最適化において、入力や解の妥当性に関する情報が不完全な計算問題を対象に、アルゴリズムの系統的設計法および評価手法を開発することで、アルゴリズム理論の新展開に寄与することを第一目標とする。実用上重要な問題の多くが離散最適化問題として定式化できることが知られているが、アルゴリズム理論よりも古くから、OR という、やや異なる視点をもつ分野での研究を通して、離散最適化には数理計画法やメタヒューリスティクスなどの解決アプローチが存在する。通常は、アルゴリズムの理論的産物を実用化して、これら工学的異種アプローチにおける成果に結びつける場合が多いのではあるが、本研究では逆に、工学的アプローチでの成功を裏打ちする原理を解明することで、アルゴリズム論の従来の枠組み

を超えた設計技法の獲得を目指す。

### 3. 研究の方法

- (1) メタヒューリスティクスの成功メカニズム.  
古典的な局所探索, ニューラルネット, 蟻コロニーから, シミュレーテッドアニーリング(SA), 遺伝的アルゴリズム(GA), タブー探索など, これまでに数々のメタヒューリスティクスによる最適化技法が開発されてきた. その多様性からも窺い知れるように, あらゆる最適化問題に効果的な万能ヒューリスティクスが存在するとは考えられず, どのヒューリスティクスもその振舞いや性能は, 対象とする問題に大きく依存するのが通常である. そこで,
  1. メタヒューリスティクスと, それが得意とする問題の組み合わせについて, 既知結果を調査する. 本質的メカニズムを解明するためにも, できるだけヒューリスティクス本来の特性・性能について評価する.
  2. 組み合わせが有望であると判断された問題とヒューリスティクスに対しては, それらが「うまくいく原理」を探求する. 潜在するアルゴリズム原理と, それに付随するメカニズムを発見する必要がある.
  3. ヒューリスティクスが提供するメカニズムを効率的にアルゴリズム化することが可能できるかを検証する. と同時に, 抽出された「うまくいく原理」のみをガイドラインとする純粋培養でも, 効率的アルゴリズム設計技法の構築を試みる.
- (2) 対象問題のモデルと緩和法.
  1. SDP 緩和は LP 緩和より強力か?: SDP 緩和は LP 緩和の一般化と見なすこともでき, それ故より強力な緩和法を提供するものと考えられる. 実際に「グラフの最大カット問題」や「論理式の最大充足化問題」などを始めとするいくつかの具体的問題において, SDP 緩和法の優位性が如実に現れている. その一方で, 最終的に計算結果として得られる解の品質には両者間で差がないと信じられている問題もあり, より多くの計算能力を要する SDP 緩和を使用することが必ずしも得策であるとはいえない.
  2. なぜ SDP 緩和の適用例は少ない?: 上述のように SDP は有力な緩和技法であるが, それを適用しうる既知の具体的問題例は極めて限定的

であり, 柔軟な適用性から高い汎用性を有する LP 緩和とは好対照である.

- (3) 入力情報欠損問題に対する系統的設計法. 入力情報が不十分である際には, 問題ごとには高性能(オンライン)アルゴリズムが開発されてはいるものの, 未だ系統的設計法なるものは知られていない. そこで, 例えば入力情報が時系列にそって徐々に明らかになる(商品相場などの)環境においては, 既知情報のみから(線形計画などで)解空間を記述し, 新たな入力に応じて制約条件を付加することで解空間を修正していく, 数理計画的アプローチを検討する.

### 4. 研究成果

研究期間中に得られた主な研究成果は以下の通りである.

- (1) 有向グラフにおける木被覆問題に対する近似アルゴリズム.  
グラフの木被覆問題は, 無向グラフの各頂点に隣接するように施設を木状配置する問題との関連から, Arkin らによって導入され, 一様コストの場合に 2 倍近似保証アルゴリズムが示された. その後, 一般コストの場合でも 2 倍近似保証が可能であることが, 研究代表者により示された. このように, 無向グラフ上の木被覆問題に対する近似可能性の解明は一応の決着が見られたため, 同問題を有向グラフ上へ拡張し, その近似可能性について新たに知見を得ることを本研究の目標とした. 得られた成果を要約すると, 以下の通りである:
  1. 層別グラフというグラフクラスがあるが, 入力を 2 層層別グラフに制限し, 更に辺コストに制限を加えることで, 有向木被覆問題は集合被覆問題と等価となり, 後者の近似困難性より, 前者の近似保証は ( $P=NP$  でない限り)  $\Omega(\log n)$  となる. 一方, 一般の有向木被覆問題は有向シュタイナー木問題に還元でき, そのため  $o(n^{\epsilon})$  近似可能である.
  2. そこで, 入力を 2 層層別グラフに限定した有向木被覆問題(ただし, 辺コストは制限なし)について考え,  $o(\log n)$  倍近似可能であることを示した.
  3. 2. の結果を発展させ, 入力を  $k$  層層別グラフに限定した有向木被覆問題(ただし, 辺コストは制限なし)に対しても,  $o(\log^{k-1} n)$  倍近似可能であることを示した.
- (2)  $d$ -claw free グラフ上の独立集合問題に

対する局所探索法.

グラフの独立集合問題は、グラフ理論における基本問題であるが、一般には多項式時間では近似することすら難しい NP 困難問題でもある. 一方、重要なグラフクラスに  $d$ -claw free グラフがあり、入力を同グラフに制限すると、自然な局所探索法により  $(d+1+\epsilon)/2$  倍近似 (ただし、 $\epsilon > 0$ ) できることが知られている. しかし、グラフの頂点に任意の重みを許し、頂点重みの総和を最大化することを目的とする、重みつき独立集合問題においては、同手法の有効性は失われ、その近似性能は貪欲法程度にまで劣化する. このような  $d$ -claw free グラフ上の重みつき独立集合問題に対し、現在最良の近似アルゴリズムとして、 $d/2$  倍を保証する  $\Omega(n^d)$  時間アルゴリズム、もしくは任意の  $d$  で多項式時間である  $2(d+1)/3$  倍アルゴリズムがあり、いずれも局所探索法であるが、問題本来の目的関数とは異なる評価関数を用いる点で特異である. 本研究では、重みつき独立集合問題に対する近似精度保証の改善と基本局所探索の性能限界の解明を目指し、頂点重み分布に制限のある条件下で、同問題に対する標準的局所探索法の有効性を検証した. その結果、1) 異なる重みの比が大きい (つまり  $>(3/2)(1+1/(d+1))$ ) 場合、2) すべての重みが 1 以上 2 未満である場合、およびこれら二つの場合を統合したケースとして、3) 重みをいくつかのクラスに分割でき、各クラス内の重みの比は 1 以上 2 未満、異なるクラス間の重みの比は  $(3/2)(1+1/(d+1))$  より大きい場合、のそれぞれについて、標準的局所探索法を用いて従来の近似精度保証を改善できることを示した.

(3) 多状態スキューレンタル問題に対する最適競合比の解析.

多状態スキューレンタル問題は、古典的スキューレンタル問題を一般化したオンライン問題である. プレーヤーにはレンタルか購入の選択肢に加え、初期費用と単位時間毎の両方の料金を支払う選択肢が与えられる. ここで、与えられたインスタンスに対し達成可能な最適戦略の競合比を、最適競合比として定義し、任意のインスタンスに対し、最適競合比の上限と下限を解析した. 下限はプレーヤーにとって最も有利なインスタンスが選ばれたとき、どれだけ良い競合比が達成可能かを示す一方、上限はいわゆる競合比についての一一致する上下界を意味する. 本研究では、この最適競合比の下限が、プレーヤーの選択肢の数を  $k+1$

個とすると  $(k+1)^k / ((k+1)^k - k^k)$  であることを示した. このことは、いかなるインスタンスに対し最適戦略をとっても、競合比を  $e/(e-1)$  より小さくできないことを意味する. また、状態数を 3 つに限定したものに對し上限は 2.47 であり、選択肢を 4 つに限定したものに對し上限は 2.75 であることも示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

北野琢麻, 藤原洋志, 藤戸敏弘, 多状態スキューレンタル問題に対する最適競合比の解析, 情報処理学会研究報告, 査読無, 2011-AL-133, 2011, 1-8.

北山教行, 藤戸敏弘,  $d$ -claw free グラフ上の独立集合問題に対する局所探索法について, 電子情報通信学会技術研究報告, 査読無, COMP2009-54, 2010, 33-38.

多田哲馬, 藤戸敏弘, 層別グラフにおける有向木被覆問題の近似について, 数理解析研究所購求録, 査読無, 2009-5, 153-159

〔学会発表〕(計 1 件)

猿渡慎也, テトリスに対するオンラインアルゴリズム, 第 5 回組合せゲーム・パズル研究集会, 2010 年 3 月 1 日, 東京工業大学.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計◇件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤戸 敏弘 (TOSHIHIRO FUJITO)  
豊橋技術科学大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：00271073

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：