

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20500010

研究課題名(和文) 高階相互作用の幾何とプログラム意味論

研究課題名(英文) Higher-order Geometry of Interaction and Program Semantics

研究代表者

長谷川 真人 (HASEGAWA MASAHIRO)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973

研究成果の概要(和文)：

双方向に作用しあう計算プロセスからなるシステムのモデルである「相互作用の幾何」は、高階関数・高階プログラムの解釈に必要な構造(モノイダル閉圏の構造)を加えることにより、計算資源の非線型な利用を明快に表現できる、より豊かな数学構造を自然に持つようになることが、研究代表者の最近の研究によって明らかになってきた。本研究は、この最近の発見を出発点として、高階関数と巡回・再帰構造の有機的な組み合わせを中核にした、「高階相互作用の幾何」の理論を提唱し、その数学的な基礎とプログラミング言語の理論における応用を与えることを目指した。成果として、トレース付きモノイダル閉圏の基礎理論の構築、Joyalらのトレース付きモノイダル圏の構造定理の不備の発見とその修正、また巡回必要呼びバラムダ計算の操作的意味論の整備などが得られた。

研究成果の概要(英文)：

Geometry of Interaction is a mathematical theory of bi-directional interactive computation. Recently, the principal investigator noticed that, by adding higher-order constructs (monoidal closed structure) to Geometry of Interaction, one obtains a rich mathematical structure which can be used for modeling non-linear usage of computational resource. Starting from this observation, this project aimed at providing a theory of Higher-order Geometry of Interaction which combines higher-order computation and cyclic structure in a neat way, together with applications in theory of programming languages. As outcome, we established basic results on traced monoidal closed categories, gave a correction of an error in the structure theorem for traced monoidal categories by Joyal et al., and provided a basic result on the operational semantics of the cyclic call-by-need lambda calculus.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：理論計算機科学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：プログラム理論、プログラム意味論、数理論理学、圏論、トポロジー

### 1. 研究開始当初の背景

**相互作用の幾何 (Geometry of Interaction, 以下GoIと略)**は、もともと、1980年代後半に、Girardが、数理論理学の証明論における証明の標準化の過程の数学モデルとして考案したものである。その後、1990年代初頭に、Abramskyが、双方向に作用しあう計算プロセス同士のなす関係を理解するための枠組みとして、一般化されたかたちでのGoIの理論を展開した。その数学的な核心は、巡回的な構造をもつ圏(**トレース付きモノイダル圏**)から、自己双対的な圏(コンパクト閉圏、あるいはより一般にリボン圏・トーテイルモノイダル圏)を構成する、**Int構成**と呼ばれる方法である。トレース付きモノイダル圏は、再帰プログラムの意味論においても基礎的な役割を果たすことが、代表者らの先行研究で示されており、Int構成により、再帰プログラムの意味論からGoIのモデルを得ることができる。しかし、GoIのモデルから再帰プログラムの意味論を得ることは、一般にはうまくいかないことが知られていた。

### 2. 研究の目的

代表者は、プログラムをデータとして処理する高階関数を扱えるような状況(トレース付きモノイダル閉圏)では、GoIのモデルから再帰プログラムの意味論を再構成することが常に可能であることを発見した。本研究では、この結果を出発点として、高階関数と再帰構造の有機的な組み合わせを中核にした、**高階相互作用の幾何 (Higher-order Geometry of Interaction)**の理論を提唱し、その数学的な基礎およびプログラミング言語理論における応用を与えることを目指した。特に、トレース付きモノイダル閉圏に基づく基礎理論の構築と、関数型プログラミング言語における制御構造の意味モデルの構成および分析への応用を中心的な目標とした。

### 3. 研究の方法

初年度は本研究の基礎となる数学的手法の開発と整理を中心に行い、二年目以降はそれに加えて具体的な応用の例を与えることを目指した。基本的に代表者が個人で遂行し

たが、内外の関連分野の専門家との討論や共同研究も積極的に進めた。得られた成果の内には、京都大学助教の勝股審也氏や、タリン工科大学研究員の中田景子氏との共著論文で発表したものが含まれている。

### 4. 研究成果

- (1) トレース付きモノイダル閉圏の基礎理論を整備し、論文④で発表した。具体的には、トレース付きモノイダル圏が閉(closed)であることと、Int構成によって得られるリボン圏(トーテイルモノイダル圏)への埋込み関手が右随伴関数を持つことが必要十分であることを示した。その帰結として、再帰プログラムの意味論において高階関数に相当するプログラムが解釈できることが、Int構成によって得られた相互作用の幾何のモデルからもとの再帰プログラムの意味論を(線形冪余モナドの余 Kleisli 圏として)再構成できることと必要十分であることがわかる。そして、このことを用いて、再帰プログラムの意味論に用いられる線形不動点演算子の新しい構成を得た。これらの結果は、高階相互作用の幾何の数学的な明快さを示すと同時に、今後の計算機科学における応用の可能性を示唆するものである。(実際、勝股審也氏は、最近の論文で、高階相互作用の幾何の属性文法の理論への興味深い応用を与えた。)
- (2) トレース付きモノイダル圏とInt構成に関して先行研究が含んでいた誤りを発見・修正し、論文②(勝股氏との共著)で発表した。Joyalらの1996年の論文では、トレース付きモノイダル圏の構造定理の中で、Int構成が、リボン圏の2-圏からトレース付きモノイダル圏の2-圏への埋め込み2-関手の右双随伴(right biadjoint)を与えることを主張しており、この結果はInt構成の普遍性を示すものとして、広く認められていた。しかし、我々は、この双随伴性の主張が誤りであり、具体的な反例が存在すること、およびトレース付きモノイダル

圏の2-圏の2-セル (モノイダル自然変換) を可逆なものだけに制限して修正すれば双随伴性が成り立つことを示した。トレース付きモノイダル圏の2-圏の2-セルは、計算機科学での応用において重要な役割を果たしてきているが、我々の結果により、多くの先行研究における2-セルの誤った使用およびその修正方法が明らかになった。

- (3) 実際的な関数型プログラミング言語に直接関係する成果として、巡回共有構造に基づく再帰プログラムの必要呼び (call-by-need) 評価意味論に関する基礎的な結果を得た (論文③、中田景子氏との共著)。必要呼びラムダ計算の操作的意味論としては、Ariola らの局所的な書換え規則に基づく簡約意味論 (1995) と、Launchbury の大域的なヒープを用いた自然意味論 (1993) とが知られており、Maraist らの先行研究 (1998) では、巡回構造を含まない場合について簡約意味論と自然意味論が同値であることが、証明なしに主張されていた。我々は、巡回構造を含まない場合と含む場合の両方について、簡約意味論と自然意味論の同値性の完全な証明を与えた。この成果により、必要呼び評価の操作的意味論については十分良い見通しが得られた。しかし、そのトレース付きモノイダル圏による巡回共有構造の表示的意味論や高階相互作用の幾何との正確な関係を明らかにすることは、今後の重要な研究課題である。
- (4) 再帰プログラムの意味論と結び目の量子不変量の理論の双方の非自明な例になっているリボン圏の構成に成功し、論文①および学会発表②で報告した。具体的には、集合と二項関係のなすコンパクト閉圏 Rel においてリボン Hopf 代数を任意の群  $G$  から量子二重化を用いて構成し、そのモジュールの圏として、非自明なブレディングと線形冪余モナド及び線形不動点演算子を合わせ持つリボン圏を得ることができた。また、このリボン圏が、交叉  $G$  集合と適切な条件を満たす二項関係のなす圏と同型である

ことを示した。これは、プログラム意味論と量子トポロジーを結びつける最初の具体例である。この成果を踏まえ、学会発表①において、プログラム意味論とトポロジーの両分野の関係の概要および今後の展望について論じた。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Masahito Hasegawa, Bialgebras in Rel, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 査読有, Vol.265, 2010, 337-359
- ② Masahito Hasegawa, Shin-ya Katsumata, A note on the biadjunction between 2-categories of traced monoidal categories and tortile monoidal categories, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 査読有, Vol.148, No.1, 2010, 107-109
- ③ Keiko Nakata and Masahito Hasegawa, Small-step and big-step semantics for call-by-need, *Journal of Functional Programming*, 査読有, Vol.19, No. 6, 2009, 699-722
- ④ Masahito Hasegawa, On traced monoidal closed categories, *Mathematical Structures in Computer Science*, 査読有, Vol. 19, No.2, 2009, 217-224

[学会発表] (計9件)

- ① 長谷川真人, プログラム意味論とトポロジー - 再帰・相互作用・結び目 -, 日本数学会秋季総合分科会企画特別講演, 2010年9月24日, 名古屋大学
- ② Masahito Hasegawa, Bialgebras in Rel, 26th Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics, 2010年5月6日, オタワ大学
- ③ 長谷川真人, Geometry of recursion, geometry of interaction and traced monoidal categories, 「圏論と計算機科学とトポロジー」研究集, 2009年10月17日, 信州大学
- ④ Masahito Hasegawa, Basic facts on traced monoidal categories, RIMS 合宿型セミナー「相互作用の幾何、トレース付きモノイダル圏と非明示的計算量」, 2009年8月24日, 関西セミナーハウス
- ⑤ 長谷川真人, 再帰プログラムの幾何, 相互作用の幾何, 九州大学数理科学研究院談話会, 2008年6月4日, 九州大学

〔図書〕（計0件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~hassei/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長谷川 真人 (HASEGAWA MASAHIITO)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50293973

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

勝股 審也 (KATSUMATA SHIN-YA)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：30378963

### (4) 研究協力者

中田 景子 (NAKATA KEIKO)

タリン工科大学・サイバネティックス研究所・上級研究員