

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20500013

研究課題名(和文)

媒介変数を含む多項式系を解く実用的アルゴリズムの開発

研究課題名(英文)

Development of a practical algorithm to solve polynomial systems with parameters

研究代表者：

鈴木 晃 (SUZUKI AKIRA)

名古屋大学・情報科学研究科・研究員

研究者番号：50330519

研究成果の概要(和文)：線形とは限らない一般の多項式系を解く為にはグレブナー基底の利用が有用であるが、そこに媒介変数が介入すると問題は複雑になる。このような問題を解くための実用的なアルゴリズムの開発を目指し、そのための道具の整備を進めることに成功した。

研究成果の概要(英文)：We can use Groebner basis in order to solve (non-linear) polynomial systems. If the systems contain parameters, the situation becomes extremely harder to solve them. We aimed to develop practical algorithm for such problem, and we provide several tools for them.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学、情報学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論

1. 研究開始当初の背景

係数部分に媒介変数を持つ多項式系を解くための概念として包括グレブナー基底 (comprehensive Groebner basis) 及び包括グレブナー系 (comprehensive Groebner system) という概念は存在したが、それを計算する効率的なアルゴリズムは存在しなかった。

線形方程式系に対しては行列計算という応用があり、よく知られるように産業にも科学の発展にも欠かせない概念であるが、これは実用的なアルゴリズムが存在してこそのものである。グレブナー基底は行列の標準形に相当し、多項式系は線形方程式系の拡張概念である。これを実的に解くアルゴリズムが

実現すれば、その応用は線形方程式のそれを遙かに上回る適用範囲を持つであろうと容易に予想できる。

研究代表者は、この問題に対して有効な S-S アルゴリズムを提唱したところであった。

2. 研究の目的

既に S-S アルゴリズムに対する更なる改良は国内外で研究されていたが、決定的なものは存在しなかった。また、それらの改良でも解決しきれない問題点も多く残されていた。

行列やグレブナー基底に対しては、標準形の定義が可能であったが、包括グレブナー系や包括グレブナー基底には標準形の妥当な定

義が困難であり、ともすると、S-S アルゴリズム及びその応用が出力する解は、極端に複雑なものとなる。その場合、人間の目による可読性が低いため、解の持つ意味の解釈が困難となる。なお、その解を応用しようとした場合の扱いも困難となる。なお、複数の実装により、同じ入力に対し、出力が異なる場合があり、その正しさのチェックの際にも、目視ではほぼ不可能となる場合があるが、同じ出力を意味するか否かを確認するアルゴリズムは存在する。

そこで本研究では、

- (1) 出力に対する標準形の定義、
- (2) 出力の単純化、
- (3) 媒介変数が多い場合の高速化、及び
- (4) 特殊な場合に特化したアルゴリズムの開発を目指した。

計算の高速化はもちろん重要だが、計算結果を実際に応用する場合には、上記の(1)、(2)も上に述べたように重要となる。また、一般の場合に高速な計算を実現するには時期尚早と判断し、応用が多いと考えられるシチュエーションにターゲットを絞り、その場合に特化したアルゴリズムの開発を(3)、(4)のように目指すこととした。

3. 研究の方法

上記(1)、(2)に対しては、フォンノイマン正規環上など特殊なグレブナー基底に詳しい佐藤教授(東京理科大学)に協力を仰ぎつつ、独自の視点での、数学的な意味で妥当かつ単純な構造を持つような、標準形の定義を目指した。

包括グレブナー系に関しては、条件部分と基底部分に分けられるが、条件部分の簡略化と基底部分の簡略化はある程度トレードオフの関係にあることがわかっており、妥当と思われる部分での調整が重要となった。

一方、(3)、(4)に対しては、主にグレブナー基底の計算アルゴリズムの見直しから行った。包括グレブナー系の計算により適したと考えられる基底の定義を行い、その計算を比較的規模の大きい線形代数の問題として考えることで、既存の行列計算アルゴリズムを適用できる形へと問題を変形させるアプローチを取った。

なお、研究手段としては、市販されているパソコン及び、比較的安価なソフトウェアの利用を中心とした。研究経費の削減とともに、ユーザが本研究の成果を利用する環境に近付けるという目的もあった。

4. 研究成果

(1) 包括グレブナー基底や包括グレブナー系を行列計算の経路で行う前段階として、行列を使ってグレブナー基底を計算する手法を確立させた。

グレブナー基底計算を行うブッフバーガーアルゴリズムは、S-多項式の生成と、多項式に対する単項簡約から構成される。更に S-多項式の生成は、多項式に対する単項の乗算と及び多項式同士の加算により、単項簡約についても、単項の乗算と多項式同士の加算により表現できる。さらに単項の乗算を、係数の乗算及び、項の乗算へと分解すると、ブッフバーガーアルゴリズムは、(a) 多項式への係数の乗算、(b) 多項式への項の乗算、及び(c) 多項式同士の加算へと分解できる。

ここで、項の集合に適切な順序を導入することで、多項式をベクトルとして表現できる。ここで、行列の標準形の計算が、ベクトルに対するスカラー倍と、ベクトル同士の加算にて行うことが可能であることに注目すれば、ブッフバーガーアルゴリズムに対する上記の構成要素 (a), (b), (c) の内、(a)と(c)は行列の標準形の計算として表現できる可能性に気付く。そこで適切な前操作により(b)の多項式への項の乗算を行うことで、行列の計算としてのグレブナー基底の計算を可能とするアルゴリズムを考えることができる。

本研究では、実際にそのアルゴリズムを記述し、複数の実装方法でその妥当性の検証を行った。最適化の不足により、十分な高速化は果たせなかったものの、グレブナー基底を計算するアルゴリズムとしては、とても単純なものとして実装可能ということがわかった。

さらにこれを応用して、ブーリアン・グレブナー基底の計算を線形代数にて行うアルゴリズムを提唱した。この結果により、上記の(b)の多項式への項の乗算の見積りが計算前に把握可能であり、線形代数計算との相性が良いことがわかり、またその実証のための実装も行った。本アルゴリズムで特殊な場合は高速計算が可能となることがわかった。

(2) 教育への応用も見据え、主にスマートフォン等のモバイル機器向けに、3次元グラフを表示するプログラムを作成し、その課題や困難、あるいは有用性、可能性等についてまとめ、研究発表を行った。

与えられたグラフを、アニメーションとともに表示し、また、スマートフォンに搭載された加速度センサーにより様々な角度からグラフを、直感的に、観察することを可能とした。当初は iPod touch 及び iPhone 向けに単純な機能のみを実装するに留まったが、調整可能な要素を増やすとともに iPad への移植も行った。また、iOS アプリケーションは、その作成と配布に関して、Apple 社による審査などの様々な特殊性を持つが、その特殊性に起因する問題点やその解決方法などについても研究集会で発表を行った。

また、Android への移植も行い、開発言語などの開発環境の違い、OpenGL の操作方法の違いから、Apple AppStore と Android Market の共通点についてもまとめた上で、発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 9 件)

- (1) グラフ表示を行うモバイルアプリのマルチプラットフォーム化, 鈴木晃, 2011 年 1 月 23 日, 日本数式処理学会システム分科会, 福岡大学
- (2) スマートフォンならではのグラフ表示, 鈴木晃, 2010 年 3 月 23 日, 数学ソフトウェアとフリードキュメント 10, 慶應大学日吉キャンパス
- (3) Computing Boolean Groebner Bases within Linear Algebra, Akira Suzuki, 2009 December 14, ASCM 2009, Fukuoka (Japan)
- (4) Computing Groebner Bases within Linear Algebra and Its Implementation, Akira Suzuki, 2009 July 30, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2009; Poster), Seoul (Korea)
- (5) Computing Groebner Bases within Linear Algebra, Akira Suzuki, 2009 September 15, Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2009), Kobe (Japan)
- (6) Groebner bases computation within

linear algebra and its application to comprehensive Groebner systems, Akira Suzuki, 2009 June 25, Application of Computer Algebra (ACA2009), Montreal (Canada)

- (7) 行列演算によるグレブナー基底計算とその実装, 鈴木晃, 2009 年 6 月 12 日, 第 18 回日本数式処理学会大会, 龍谷大学
- (8) Implementation of CGS on small devices, Akira Suzuki, 2008 July 29, Application of Computer Algebra (ACA2008), Linz (Austria)
- (9) Boolean Groebner Bases and Sudoku, Yosuke Sato, Akira Suzuki, Shutaro Inoue and Katsusuke Nabeshima, 2008 July 27, Application of Computer Algebra (ACA2008), Linz (Austria)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 晃 (SUZUKI AKIRA)
名古屋大学・情報科学研究科・研究員
研究者番号：50330519

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

佐藤 洋祐 (SATO YOSUKE)
東京理科大学・理学部第一部・教授
研究者番号：50257820