様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月２５日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究 （C）
研究期間：2008 ～ 2010
課題番号：２０５０００２２
研究課題名（和文） 平面グラフの分枝分割アルゴリズムのより広いクラスへの拡張

研究課題名（英文） Extending the branch-decomposition algorithm for planar graphs to broader class of graphs

研究代表者
玉木 久夫（TAMAKI HISAO）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：２０１１１３５４

研究成果の概要（和文）：種数 g ≧ １の向き付け可能表面に埋め込まれたグラフの分枝分割に対する近似度(1＋2g/3)のアルゴリズムを開発した。この結果は、同様なグラフの分枝幅 bw(G)と面幅 fw(G)の間に bw(G)≧(3/2)fw(G)の関係が成り立つことを示すことにより得られた。また、平面グラフ G の分枝幅と最大の格子マイナーの大きさ gm(G)の間に bw(G) ≦ 3gm(G)が成り立つことを示し、それに基づいた平面グラフの分枝分割の高速定数近似アルゴリズムを開発した。

研究成果の概要（英文）：We have developed a (1 + 2g/3)-approximation algorithm for the branch-decomposition of graph G embedded in an orientable surface of genus g. This result is based on an inequality bw(G) ≧ (3/2)fw(G), where bw(G) is the branchwidth of G and fw(G) is the face-width of G. We also have shown the inequality bw(G) ≦3gm(G) for planar graphs, where gm(G) is the size of the largest grid minor of G and, based on this inequality, have developed a fast constant-factor approximation algorithm for the branch-decomposition of planar graphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：総合領域
科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎
キーワード：アルゴリズム、グラフ、分枝分割、分枝幅、グラフマイナー

１．研究開始当初の背景

グラフ上の組み合わせ最適化問題に重要な応用を持つ分枝分割について、最適な分枝分割を求める問題は一般には NP 困難であるが、平面グラフに対しては多項式時間アルゴリズムが知られていた。このアルゴリズムを何等かの形で平面グラフより広いクラスに拡張できるかどうかは、興味深くまた応用上も極めて重要な問題であった。

２．研究の目的

平面グラフに対して知られている分枝分割の多項式時間アルゴリズムを、より広いクラスに拡張することを目的とした。

３．研究の方法

（１）非常に限られた形の辺交差のみを許して平面上に描画できるグラフのクラスに対して、刻み分割の多項式時間アルゴリズムを開発することを初期の主軸に据えた。方法は、平面グラフに対して成功している、ネズミ捕りゲームによる刻み幅の特徴づけをそのようなグラフクラスに拡張することである。平面グラフ上では、最適な刻み分割を求めるアルゴリズムは最適な分枝分割を求めるアルゴリズムを誘導するので、このアプローチは妥当である。ただし、拡張したグラフクラスにおいては、最適な刻み分割を求めるアルゴリズムが必ずしも最適な分枝分割を求めるアルゴリズムに結びつかないので、その点については、さらなる検討が必要となる。
（２）同時に、平面グラフそのものの分枝幅についての理解を深めるために、分枝幅と格子マイナーの大きさの関係に対する Robertson, Seymour と Thomas の不等式の改良に努めた。また、この改良を通じて、平面グラフに対する分枝分割の定数近似アルゴリズムで、線形時間に近い実行時間のものを開発することに努めた。
（３）また、平面グラフを拡張したクラスとして、種数が１以上の表面に埋め込まれたグラフの分枝幅に対する近似アルゴリズムの開発に努めた。
（４）さらに、関連研究として木幅やパス幅の有向グラフ版について、それらを求めるアルゴリズムの開発と応用の研究を行うこととした。
（５）また、グラフ分割に関連したテーマとして、グラフスパナ―の研究も行うこととした。t を正整数とするとき、グラフ G の t-スパナ―とは、G の全域部分グラフ H で、G のどの隣接頂点対 u, v に対しても H において u, v を端点とする長さ t 以下の経路が存在するようなものを言う。この研究では、特に有向グラフのスパナ―について集中的に研究を行うこととした。

４．研究成果
（１）想定した形の辺交差を許すグラフのクラスに対して、＋１近似のアルゴリズムの設計と正しさの証明の大筋を完成したが、その細部について完全に書き下ろすことはできなかった。

（２）グラフ G の分枝幅を bw(G)、G が g × g の格子マイナーを持つような最大の g を gm(G)で表す。gm(G)は bw(G)の下限であることはよく知られている。

定理１ 平面グラフ G に対し bw(G) ≦ 3gm(G)が成り立つ。

この定理は、Robertson, Seymour と Thomas による結果 bw(G) ≦ 4gm(G)の改良である。この不等式の右側に現れる係数は、双次元的と呼ばれる性質を持つグラフパラメータを求める一般的なアルゴリズムの実行時間を表す式の指数部に現れるため、このような改良は極めて重要である。また、さらにこの不等式の証明の副産物として、平面グラフの分枝分割に対する定数近似を $O(n^{(1+\varepsilon)})$時間で行うアルゴリズムを開発した。このアルゴリズムは、平面グラフの良いセパレータを求めるアルゴリズムとしても知られているなかで最速であり、重要な応用を持つ結果である。定理１は、次のより一般的な結果に基づいている。k 頂点の閉路と h 頂点の経路のデカルト積を k×h シリンダーと呼ぶ。

定理２ G を平面グラフ、k≧3 と h≧１を整数とする。このとき、G は k×h シリンダーと同型なマイナーを持つか、あるいは幅 k+2h-3 以下の分枝分割を持つ。

この定理で、h = k とおくことにより定理１が得られる。h = [k/2]の場合も興味深い。ここで、[]は切り上げを表す。cm(G)によってグラフ G が k×[k/2]シリンダーをマイナーとして持つような k の最大値を表す。
すると、k×[k/2]シリンダーの分枝幅は k であるので、cm(G)は bw(G)の下限であるが、一方定理２より平面グラフに対しては bw(G)≦2cm(G)が成り立つ。すなわち、平面グラフにおいて cm(G)は gm(G)よりも精度のよい分枝幅の下限であるということができる。
さらに、定理１のタイトさの程度を表す次の定理も得た。

定理３　G を 2k×k シリンダーとするとき、bw(G)=2k であり、gm(G)=k である。

つまり、定理１の定数を２より小さくすることはできない。

（３）G を種数が g≧１の向付可能表面Σに埋め込まれたグラフとする。fw(G)によって、G の面幅、すなわちΣにおいて縮約不能で G の辺とは頂点においてしか交わらないようなΣの閉路が交わる G の面の個数の最小値を表す。

定理４　G を種数が g≧１の向付可能表面Σに埋め込まれたグラフとするとき bw(G)≧(3/2)fw(G)が成り立つ。

この定理は、Robertson と Seymour による不等式 bw(G)≧fw(G)の改良である。この不等式にもとづいて、G の分枝分割に対する(1 + 2g/3)-近似アルゴリズムを開発した。これまでに知られていた近似アルゴリズムは種数 g

に対して指数的に依存していたので、大きな改良である。
定理４の証明は、Robertson と Seymour によって導入され、Inkmann によって拡張されたスロープの概念に基づいている。表面Σに埋め込まれたグラフ G に対する位数 k のスロープとは、k 個未満の頂点を含む G のカットである条件を満たすものすべてに対して、そのカットの「小さい」側を指定し、一定の条件を満たすものを言う。G の分枝幅が k 以上であることと、G が位数 k のスロープを持つことが同値であることが上記の著者らによって証明されている。そこで、我々は、G が位数(3/2)fw(G)以上のスロープを持つことを示すことにより定理４を証明した。

（４）無向グラフにおけるパス幅の有向グラフへの一般化である有向パス幅に対して、その幅が有界である場合の多項式時間アルゴリズムを開発した。より正確には、正整数 k と有向グラフ G が与えられたとき、このアルゴリズムは G が幅 k 以下の有向パス分割を持つかどうかを $O(mn^{k+1})$時間で判定し、もし持つならばその分割を構成する。このアルゴリズムは無向グラフのパス幅を求めるアルゴリズムとしても、k への依存度は知られているなかで最も小さく、グラフの頂点数と k の値の組み合わせによっては最も実用的と言うことができる。
また、有効パス幅を用いて、ブーリアンネットワークのアトラクターを列挙するヒューリスティックなアルゴリズムを開発し、有効パス幅の小さいブーリアンネットワークに対しては非常に有効であることを実験的に示した。ブーリアンネットワークとは、n 個の頂点からなる有向ネットワークであり、各時点において各頂点は０または１の値をとる。頂点 v の次の時点における状態は、v へ入る辺を出す頂点のみに依存し、v の入次数を k とするとあらかじめ指定された k 引数のブール関数によって決定される。システム全体の状態遷移は$\{0,1\}^n$から$\{0,1\}^n$への関数 f によって表現することができる。この１システムは、初期状態にかかわらずいつかはアトラクタ、すなわち状態の巡回列に落ち込む。与えられたブーリアンネットワークのアトラクタを列挙する問題は生命情報科学の応用上重要であるが、厳密に解くためには 2^n 個すべての状態を出発点として状態遷移を追う以外の方法は知られていなかった。
この研究では、ブーリアンネットワークの有向グラフとしての有向パス幅が小さいときに（たとえば３～５）有効な方法を開発した。この方法では、与えられたネットワークの大きさ１、２、…、n の大きさのサブネットワークの系列を考える。各サブネットワークは、そのサブネットワークの状態に影響を与える頂点の集合 U とするとき、U の頂点の状態をすべて固定すれば決定的なシステムであるが、U の頂点の状態を不定とすると非決定的なシステムである。重要な観察は、全体のネットワークのある状態が再帰的であれば、この状態のサブネットワークへの射影も（非決定的な遷移システムにおいて）再帰的であるということである。そこで、我々のアルゴリズムはサブネットワークの小さい方からその再帰的な状態の集合を構築、保持して更新していく。途中でこの状態集合が爆発しなければ（大きさ数百万のオーダーを超えないならば）全体のシステムのアトラクタをすべて求めることができる。爆発を抑えるためには、各サブネットワークに入射する頂点集合 U の大きさが小さい方が望ましいと思われる。そのような、サブネットワークへの頂点の追加の順序はまさしく最適な有効パス分割に相当する。
文献にあるランダムなスケールフリーネットワーク上で実験を行った結果、有効パス幅が３～４の場合、実質的な頂点数が５０程度のネットワークではほとんどの場合アトラクタ集合を厳密に列挙することに成功し、実質的な頂点数が１００程度の場合でも、半分程度の入力例で成功した。

（５）無向グラフ G の向き付けとは、G の各辺に可能なふたつの向きのどちらかを割り当てることによってできる有向グラフのことを言う。G の向き付け H が k 巡回的であるとは、G のどの辺もそれを向き付けた辺が H の有向閉路で長さが k 以下のものに含まれることを言う。無向グラフ G の k 巡回的の向き付けは、G の各辺を両方向きの有向辺の対で置き換えてできる対称的有向グラフ G’の、反対称的な有向(k-1)-スパナ―と言い換えることができる。与えられたグラフ G が k 巡回的であるかを（固定した k に対して）決定する問題の複雑度を調べ、①一般のグラフに対しては 3 以上のどの k に対しても NP 完全である、②平面グラフに対しては、４以上のどの k に対しても NP 完全である、③平面グラフで k＝３の場合には多項式時間アルゴリズムが存在することを示した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① “A Directed Path-Decomposition Approach to Exactly Identifying Attractors of Boolean Networks”, <u>Hisao Tamaki,</u> Proc. 10th International Symposium on Communication and Information Technologies, 844-849, 査読あり, 2010

② “Improved Bounds on the Planar Branchwidth with Respect to the Largest Grid Minor Size”, Qian-Ping Gu, Hisao Tamaki, Proc. 21st International Symposium on Algorithms and Computation, 85-96, 査読あり, 2010

③ “k-Cyclic Orientations of Graphs”, Yasuaki Kobayashi, Yuichiro Miyamoto, Hisao Tamaki, Proc. 21st International Symposium on Algorithms and Computation, 73-84, 査読あり, 2010.

④ “Constant-Factor Approximations of Branch-Decomposition and Largest Grid Minor of Planar Graphs in $O(n^{1+epsilon})$ Time”, Qian-Ping Gu, Hisao Tamaki, Theoretical Computer Science, in press, available online, doi:10.1016/j.tcs.2010.07.01, 査読あり, 2010

⑤ “Route-Enabling Graph Orientation Problems”, Takehiro Ito, Yuichiro Miyamoto, Hirotaka Ono, Hisao Tamaki, Ryuhei Uehara, Proc. 20th International Symposium on Algorithms and Computation, 403-412, 査読あり, 2009

⑥ “Optimal branch-decomposition of planar graphs in $O(n^3)$ Time”, Qian-Ping Gu, Hisao Tamaki, ACM Transactions on Algorithms 4(3), 30:1-30:13, 査読あり、2008

〔図書〕(計１件)

① 乱択アルゴリズム、玉木久夫、共立出版、２２８ページ、２００８年

６．研究組織

(1)研究代表者

玉木　久夫（TAMAKI HISAO）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：２０１１１３５４