

機関番号：32661

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20500260

研究課題名（和文） 制約のある母数に対する推定手法の開発とその応用に関する研究

研究課題名（英文） A study on estimation of restricted parameters and its applications

研究代表者

津熊 久幸 (TSUKUMA HISAYUKI)

東邦大学・医学部・講師

研究者番号：50424685

研究成果の概要（和文）：統計的モデルの未知パラメータに順序などの制約が課せられている場合の推定問題を，統計的決定理論の枠組みから扱った。制約が保存された縮小型推定量や一般化ベイズ推定量などを新たに提案し，リスク関数の解析的な評価から，それら推定量のミニマクス性などについて議論した。また，提案された推定量は，これまでに提案されていた推定量より良い推定精度を持つことが数値実験から確認できた。

研究成果の概要（英文）：This research addresses the problem of estimating restricted parameters from a decision-theoretic point of view. We propose new shrinkage estimators and generalized Bayes estimators which lie in the restricted action space, and discuss the minimaxity of the proposed estimators by analytical evaluation of their risk functions. Monte Carlo simulations show the proposed estimators have better risk performance than some estimators studied in the literature.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数理統計学

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：統計的推測・ベイズ推定・統計的決定理論・縮小推定・スタイン現象

1. 研究開始当初の背景

多変量正規分布モデルにおいて，平均ベクトルの最尤推定量は最小分散不偏推定量であり，一貫性やミニマクス性など推定量として優れた性質を併せ持っている。しかし2乗損失関数を基準にして考えた場合，平均ベクトルが3次元以上のとき最尤推定量が非許容的になるという意外な事実が1956年Steinによって示され，1961年にはJamesとSteinによって縮小推定量と呼ばれる，最尤推定量よりよい推定量が具体的に与えられた。これ

らの後，縮小推定量のさらなる改良や，平均ベクトル以外の推定問題への拡張がなされている。

そのような理論の発展例の一つとしては，打ち切り推定量が挙げられる。縮小型推定量の欠点は原点方向への過度な縮小が起ることであるが，Positive-part推定量と呼ばれる打ち切り型推定量が提案され，James-Stein推定量のさらなる改良に関する研究が展開されている。

また，平均ベクトル以外の推定問題への拡

張にはさまざまなものがあるが、最近では、制約のある母数の推定問題への展開もおこなわれるようになり、制約付き最尤推定量の縮小推定による改良なども議論されている。また、制約された母数空間上の一様分布を事前分布とする一般化ベイズ推定量とみなせる Pitman 推定量についても決定論的な観点からの研究がある。しかしながら、制約のある母数の推定理論の発展は十分なされていないとはいえず、さらなる研究の積み重ねが必要と思われた。

2. 研究の目的

縮小推定は理論的な統計学の分野から発展してきたが、制約のある母数の推定問題は現実のデータ解析において非常に有用である。実際、動植物の生育や経済動向のような自然界や社会における現象には、時間や温度などの観測点に対して単調な変化が期待できる場合がある。このような現象を統計解析するとき、一般的には線形回帰モデルを想定することが多い。しかし、観測点が増えると観測領域の全体で線形な変化が期待できなくなるといった問題なども出てくる。そのようなときは単に母数に順序制約を仮定した統計的モデルを想定するほうが合理的であろう。

本研究は、母数空間にさまざまな制約がある場合の統計的推測に対して統計的決定理論の視点から検討し、縮小型推定法やベイズ法による新たな推定手法の開発を主な研究目的とした。

3. 研究の方法

研究期間内に、以下のアプローチで研究を進めた。

(1) 制約のある母数のベイズ推定量、特に2乗損失関数に関するベイズ推定量は制約された空間上での多重積分で表現され、その決定理論的性質を調べるためにはリスク関数の評価が必要になる。また、母数空間が制約されている場合の制約付き最尤推定量は、制約のない最尤推定量を、母数空間に対応する制約された推定量の空間への正射影として得られる場合が多い。

そこで、さまざまな母数に対する新たな推定方法を開発するために、調和解析やベクトル解析、幾何学などの視点からベイズ推定量や経験ベイズ推定量、制約付き最尤推定量、さらにそれらのリスク関数の数理的な構造や性質を調べ上げ、その結果を参考にして新たな縮小型・拡大型推定手法を考案していく。

(2) 先行研究で提案されているさまざまな推定量について、シミュレーションを通じて、問題点を抽出し、改良方法についての方向性を探索する。また、(1)で考案された新たな

推定法も含めて、各推定量の特徴を理論的・数値的に調査し、さらなる改良についての知見を得ていく。

4. 研究成果

(1) 位置母数が凸集合に制約されている場合の推定問題における研究成果：

位置母数に何らかの制約がある場合の同時推定問題は、これまでにいくつかの研究があるが、正象限制約や単純な順序制約といった特殊な場合に対して、個別に扱っているものが多い。しかし、多変量正規分布モデルにおける平均ベクトルの推定問題では、その平均ベクトルがより一般的な凸集合に制約されているときに、制約付き最尤推定量がその縮小型推定量によって改良されることが知られている。位置パラメータがより一般的な凸集合に制約されている場合の、位置母数の同時推定問題を、非正規分布モデルにおいて議論した結果が以下である。

① 正象限制約や単純な順序制約は、母数空間が凸多面錐に制約されているとみなすことができる。このような凸多面錐を含む凸錐に平均ベクトルが制約されている場合の、楕円型分布族モデルの平均ベクトルの推定問題を扱った結果、不変な損失関数の下で制約付き最尤推定量がその縮小型推定量によって改良されることがわかった。ここでの凸錐とは、原点から境界上の点へのベクトルと、その点での外向きの法線ベクトルとの内積が負になるような凸錐のことであり、正象限制約や単純な順序制約などを表す凸多面錐を含んでいる。

② 指数型分布族モデルや球対称分布族モデルにおいても、母数空間が凸錐に制約された位置母数の推定問題を考えたとき、制約付き最尤推定量を改良する縮小推定量を導出することができた。さらに、これらの分布族モデルの場合には、縮小推定によって過度な縮小がおこった場合、正射影による修正方法も提案できた。数値実験による推定量の比較もおこない、縮小推定量によってリスクが軽減されることがわかった。

(2) 正值をとる母数に順序制約などがある場合の同時推定問題における研究成果：

分散分析モデルや変量効果モデルを考えたとき、それらを正準形に変換すると、複数の分散パラメータ間に順序制約が入る場合がある。このような順序制約のある分散パラメータの同時推定問題に対しては、リスク関数の評価が難しく、決定理論的な研究はあまり進んでいない。本研究では、このような位置母数以外の、制約のある正值母数の同時推定問題に取り組み、主に以下のような結果を

得た。

① 複数の正値をとる母数間に順序制約がある場合に対して、スタイン損失関数の下で考えた。このとき、制約のない推定量は、その推定量から順序統計量や *isotonic regression* などによって順序補正した推定量によって改良されることを示した。

また、順序付けられた（大小関係のある）複数の共分散行列の同時推定問題への拡張もおこなった。

制約のある母数空間での決定論的推定問題では、分散のような平均以外の推定問題に関してわずかな結果しか報告されていない。したがって本研究での結果は、先行結果のさらなる発展を促し、縮小型推定やベイズ法の新たな研究領域を切り開く重要な意味をもつものと思われる。

② 多変量尺度分布族モデルにおいて、尺度母数間に順序制約がある場合、制約のない Pitman 推定量である不偏推定量のミニマクス性を示すことができた。この結果から、制約のない Pitman 推定量を順序補正した推定量もミニマクスとなることがわかった。

③ 分散が異なる複数の正規分布において（分散に制約がない）、分散パラメータ（精度パラメータ）の同時推定問題を 2 乗損失関数のもとで考え、縮小型および拡大型推定量がミニマクスになるための条件を求めた。また、ベイズ推定に関する事前分布の特徴付けに関する知見が得られ、いくつかの一般化ベイズ推定量を導出した。数値実験を通じて、新たに得られた推定量がよいリスクの挙動を持つことが確認できた。この結果は、制約のある母数の推定問題とは直接的な関連はないが、今後の研究への示唆は与えるものと思われる。

（3）平均行列の推定問題における研究成果：

誤差項が多変量正規分布にしたがう、ある種の多変量分散分析モデルは、行列型正規分布モデルとして表現することができる。このとき、未知の平均行列を推定する問題は決定理論の分野では古くから研究されている分野の一つである。

平均行列の推定問題は不変性を考慮することにより、平均行列の順序付けされた非負特異値の推定問題に帰着され、その「順序」と「非負」という制約が、よりよい推定量を構成する上で重要な情報となる。

本研究では、さまざまなモデルに関する平均行列の推定問題についても扱ったが、以下のような結果が得られた。

① 共分散構造が既知の行列型正規分布モデルにおいて、不変性をもつ事前分布に関するベイズ推定量は、その特異値が「非負」であり、しかも「順序」も保存されていることがわかった。また、ある *proper* な不変事前分布を考えることにより、許容的かつミニマクスなベイズ推定量の導出に成功した。多変量正規分布モデルの平均ベクトルの推定問題では、これまでさまざまなベイズ推定量が提案されているため、本研究の結果から推測すると、行列平均のベイズ推定も同様に今後進展していくものと思われる。

② 共分散構造が未知の場合の行列型正規分布モデルの平均行列の推定問題において、不変な 2 乗損失関数に対する、ある一般化ベイズ推定量のミニマクス性の証明に成功した。

また、未知の分散パラメータと単位行列との積で表されるような、特殊な共分散構造をもつ行列型正規分布モデルにおいては、許容的かつミニマクスなベイズ推定量を導出に成功した。そのベイズ推定量の特異値について、上記の「順序」と「非負」という性質をもつことを示した。

③ 相関構造が未知のときの行列変量（多変量）である楕円型分布族モデルにおいて、行列型平均の推定問題を 2 乗損失関数のもとで考え、ある一般化ベイズ推定量が最尤推定量を改良すること、すなわちミニマクス性をもつことを証明した。その証明において、推定量の特異値が順序をもち、非負であることを利用した。

④ 行列平均の縮小推定では、縮小しすぎて推定量の符号を変えてしまうという問題がある。多変量正規分布の平均ベクトルの推定問題は平均行列の推定問題の特殊ケースであるが、「非負」という情報を利用することによって、James-Stein 型縮小推定量はその *Positive-part* 推定量と呼ばれる打ち切り推定量によって改良されることが知られている。また同様に、共分散構造が既知の行列型正規分布モデルの行列平均の推定問題では、過度な縮小への対処法として推定量（行列）の特異値がゼロより小さいときはその特異値をゼロに置き換える（打ち切る）という方法が提案されている。

共分散構造が既知の場合には、上記のように特異値の「非負」という性質を利用した改良は考案されていたが、「順序」という性質を利用した改良方法は提案されていなかった。この問題について本研究で取り組んでみた結果、打ち切りと同時に *isotonic regression* や順序統計量を用いた順序補正によって、元の縮小型推定量は改良されること

が理論的に証明できた。

また、共分散構造が未知の行列型正規分布モデルや、相関構造が未知の楕円型分布族モデルにおける平均行列の縮小型推定に関しては、「非負」という情報を利用した打ち切り推定量が元の縮小型推定量を改良することが証明でき、打ち切り縮小型推定量がミニマクスであることがわかった。数値実験を行った結果、打ち切り縮小型推定量は多大なリスクの減少をもたらすことが確認された。しかし、「順序」という性質を利用しての改良については理論的に確認することができず、未解決問題として残った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- ① Tsukuma, H. and Kubokawa, T. (2011). Modifying estimators of ordered positive parameters under the Stein loss, *Journal of Multivariate Analysis*, 102, 164-181. 査読有.
- ② Tsukuma, H. (2010). Proper Bayes minimax estimators of the normal mean matrix with common unknown variances, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 2596-2606. 査読有.
- ③ Tsukuma, H. (2010). Shrinkage priors for Bayesian estimation of the mean matrix in an elliptically contoured distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, 101, 1483-1492. 査読有.
- ④ Tsukuma, H. (2010). Shrinkage minimax estimation and positive-part rule for a mean matrix in an elliptically contoured distribution, *Statistics & Probability Letters*, 80, 215-220. 査読有.
- ⑤ Tsukuma, H. (2009). Shrinkage estimation in elliptically contoured distribution with restricted parameter space, *Statistics & Decisions*, 27, 25-35. 査読有.
- ⑥ Tsukuma, H. (2009). Generalized Bayes minimax estimation of the normal mean matrix with unknown covariance matrix, *Journal of Multivariate Analysis*, 100, 2296-2304. 査読有.
- ⑦ Tsukuma, H. and Kubokawa, T. (2009). Minimax estimation of normal precisions via expansion estimators, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139, 295-309. 査読有.
- ⑧ Kubokawa, T. and Tsukuma, H. (2008). Minimaxity of the Stein

risk-minimization estimator for a normal mean matrix, *Statistics & Decisions*, 26, 243-261. 査読有.

- ⑨ Tsukuma, H. (2008). Admissibility and minimaxity of Bayes estimators for a normal mean matrix, *Journal of Multivariate Analysis*, 99, 2251-2264. 査読有.

[その他]

研究代表者のホームページ:

<http://www.lab.toho-u.ac.jp/med/minfo/tsukuma/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津熊 久幸 (TSUKUMA HISAYUKI)

東邦大学・医学部・講師

研究者番号: 50424685

(2) 研究分担者

該当無し

(3) 連携研究者

該当無し