

機関番号：12701

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20500749

研究課題名（和文）図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導

研究課題名（英文）Teaching on Appreciation about Rich Sense and Beautifulness  
In term of Geometrical Figures

研究代表者

前田 正男 (MAEDA MASAO)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授

研究者番号：00016164

研究成果の概要（和文）：本研究では、図形についての美しさに焦点を当て、児童・生徒が感得できる図形の美しさを下記の5つに類型化した。

- (1) 図形の視覚的な美しさ、(2) 一般的に成立する図形的性質の美しさ、
- (3) 図形を社会に応用できる美しさ、(4) 図形操作等における予想外の着想の美しさ
- (5) 図形的に具体化して説明できる美しさ

そして、小、中、高校における実験的授業を通して、事例的に、図形についての美しさを感じさせる指導展開の基本的枠組みを下記のように明らかにした。

- ① 児童・生徒に困難を感じさせる
- ② 図形の美しさに関わる事項を見出す
- ③ これまでの流れを振り返り、図形の美しさを感じ得する

研究成果の概要（英文）：In this study, beautifulness of geometrical figures is focused on and the following five viewpoints are identified so that students can appreciate the beautifulness of geometrical figures.

- (1) Visual beauty of geometrical figures
- (2) Beauty of geometrical figures having a common property in a general case
- (3) Beauty of geometrical figures to be applicable into a society
- (4) Beauty of unanticipated ideas when manipulating geometrical figures
- (5) Beauty to be explained by using concrete geometrical figures

Through experimental classroom teaching at elementary, junior and senior high school, the case based basic framework of teaching flow so that students can appreciate the beautifulness of geometrical figures is clarified as follows.

- (a) Letting students be trouble with manipulating geometrical figures
- (b) Finding something concerning with beautifulness of geometrical figures
- (c) Looking back and appreciating the beautifulness of geometrical figures

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究代表者の研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学・科学教育

キーワード：算数・数学、図形、豊かな感覚、美しさ

### 1. 研究開始当初の背景

算数・数学科の教育に対して多くの研究がなされ、得られた研究結果が実際に応用されて、児童・生徒の算数・数学科の学習に大いに役立っているところである。特に数とか量を扱う分野には沢山の研究が有り、いろいろな場面に対して、きめ細かく対応がなされている。これに対し、図形を対象とする分野に対しては、組織だった研究が少ないように感じられる。数、量というような概念は導入の段階から少しずつ概念が発展していく過程が分かり易いという特徴を持っている。

しかしながら、図形を扱う分野においては、このような明確な発展の段階というものがないか捉え難い。この点が図形教育を難しくしている一因であろう。このような状況から、図形教育のなお一層の強化がいろいろな場面、方面から叫ばれている現状である。

以上のような理由から、図形教育の出発点に立ち、図形の美しさとは何か、児童・生徒に図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させ発展させられる指導とはどのようなものか等について研究することは、大変必要で有意義なものであると考えられる。

### 2. 研究の目的

上記1の現状に鑑み、本研究では図形教育に関する基礎的な概念の把握と統一的な指導展開の枠組みの確立を試みるものである。図形に対する豊かな感覚とは何か。図形に対する美しさとはどのようなことを指しているのか。そして児童・生徒は図形のどの部分に美しさを感じるのか等の基本的な事柄を明らかにする。その後、これらの結果を基に、図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させるにはどのように指導したらよいかについて研究する。美しさを感じ得させると考えられる多くの実践授業を展開し、指導展開の枠組みを明らかにする。更に、できればこの指導展開の枠組みの有用性についても明らかにしたい。

### 3. 研究の方法

研究を始めるにあたり、本研究に協力いただける現職の小、中、高校の先生（約十数名）と教育学研究科で数学教育を学んでいる修士課程の学生（延べ約十人程度）に、本研究の目的を伝え、研究協力をお願いした。研究代表者、分担者、協力者全員出席のもと、第1回の研究会合を開催し、以下のような3年間の研究計画目標を確認した：

(1) 1年目：図形についての豊かな感覚・美しさとは何かを具体的に明らかにすること

(2) 2年目：(1)と共に、児童・生徒に図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させるにはどのように指導したらよいかを考察すること

(3) 3年目：(1),(2)で得られた結果を基に、実際の授業で豊かな感覚・美しさを感じ得できると考えられる授業を実践し、児童・生徒が図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得たかどうかについて検証すること

研究形態としては、毎回の研究会合には研究者全員に参集してもらい、その間に各研究者が研究してきた図形についての題材について発表してもらうこととした。その発表について、研究者全員で検討を加えて、図形についての豊かな感覚・美しさについての知見を得ること、この知見を各研究者が現場等に持ち帰り、さらなる研究・工夫等を加えて再び参集し研究を進める、このような方針のもと、3年間で合計10回の研究会合を持った。

更に、小、中、高校、大学、大学院生と研究者の研究分野は多岐にわたっているが、敢えて、研究担当を特定せず、全員で一緒に研究することも了解された。これは他の研究分野の者が他の研究分野の研究に異なる立場から有意義なコメントを与えることを期待したものである。

### 4. 研究成果

(1) 研究をスタートするために、まず「豊かな感覚・美しさを感じ得できる」と思われる教材をできるだけ多く集め、その一つ一つについて、どの点が豊かな感覚・美しさを感じ得できると考えられる点であるかを検討した。第1回研究会合で発表された研究題材の題目は以下のようになっている：

#### 第1回研究会合

1. 定規を用いないコンパスだけによる作図について
2. オイラーの定理と欠損角  
～作業・観察・考察を重視した数学的活動を活用する態度を育てる～
3. (i) 円の交点からいろいろな図形を作図する授業について  
(ii) いろいろな図形に共通する性質を見出す授業について
4. 折り紙で角の三等分に挑戦しよう
5. 三角形を題材とした演繹的な考え方の指導  
～図を描き、測る活動を取り入れた課題提示を通じて～
6. シェルピンスキーの四面体 実践報告

7. 正方形から正三角形に等積変形できるの？
8. 鳩目返して長方形をつくろう
9. 円周率の近似について
10. ピタゴラスの定理について

第1回会合にもかかわらず、持ち寄られたこれらの題材についてはいずれも完成度が高く、題材によっては、既に何回か授業実践が行われているものもあった。これらの題材の一つ一つについて十分な議論・討議を行った。この研究結果を各研究員が持ち帰り、更なる研究・工夫を加えて次回研究会合で発表することとした。この段階で既に、図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導に大変有意義な教材が沢山得られたという成果があった。第2回研究会合以降の発表題目は以下のようになっている。

#### 第2回研究会合

1. 三角形の仲間分けについて
2. シェルピンスキー四面体を題材として
3. 合同と三角形、四角形の展開例
4. ミウラ折りに挑戦しよう
5. 同じ形をつくろう
6. 中学生の図形に対する意識と学習態度との関連性
7. 平方根の作図について
8. 重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の発見的学習
9. 円の直径と円周の関係
10. 作図、折り紙、方程式などを利用して和算に挑戦
11. ギリシャ流の2次方程式の解法
12. 円はきれいなはなまる
13. 三角形の内角の和、折ることができるかな

#### 第3回研究会合

1. 同じ形に切ってみよう
2. 同じ形をつくろう
3. 重心と垂心と外心
4. 図形の美しさ有用性を実感させる数学的活動の授業  
～シェルピンスキー四面体を題材として～
5. 三角形をつくろう！小学四年生「いろいろな三角形」
6. 面積が最大になる正三角形をつくろう
7. 紋きり遊び
8. 四面体による空間充填
9. 重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の発見的学習  
～実験・観察を取り入れた「数学的活動」による一般化～
10. 「クリフォードの定理」を「カブリ」で確かめて大感激
11. ピタゴラス数を生成する行列について
12. 2学期図形領域の授業をふり返って

13. 四角形の midpoint 連結切り  
～凹四角形版～

#### 第4回研究会合

1. 万華鏡の不思議
2. 新しい公式をつくろう
3. 重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の発見的学習  
～実験・観察を取り入れた「算数的活動」による一般化～
4. 3番の実践授業を参観して
5. (i) 数学科指導案「シェルピンスキー四面体の不思議」  
(ii) 日頃の授業の中で「図形の美しさや豊かな感覚」に生徒と教師が触れた場面の例(中1)
6. 課題学習「ダイヤモンドゲーム」で数学しよう(1～3年)
7. パターンブロックについて
8. 図形についての豊かな感覚に培う指導
9. 図形の何に美しさを感じるか

発表題目から、一つの題材が何度も練り直されていること、また、授業指導についても研究が始まっていることが覗えるであろう。

4回の研究会合で発表され検討された上述の題材の中から、図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導に大変有用と考えられる多くの教材を得ることができた。尚いくつかの教材については、研究協力員により、各地での学会等で発表されている。

(2) 2年目研究のスタートは、1年目に得られた、図形についての豊かな感覚・美しさを感じさせる指導に有意義と考えられる多くの教材を論文の形にまとめることから始まった。

2年目の発表題目については以下に紹介するが、1年目と同様な研究会合が合計3回開催された。2回目の会合までに1年目に得られた有意義と考えられる教材が2編の論文として纏められ、横浜国立大学教育人間科学部紀要Iに発表された。これらの教材は図形教育を進める際に多くの示唆を与えてくれる大変興味ある教材であると考えられる。

平行して、図形について1年目の研究から段々明らかになってきた、児童・生徒が感得できる図形の美しさの類型化を確定するという研究も精力的に行われた。その結果、児童・生徒が図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得る図形の美しさは、次の5つの型に類型化できることが分かってきた：

[児童・生徒が感得できる図形の美しさ]

1. 図形の視覚的な美しさ
  2. 一般的に成立する図形的性質の美しさ
  3. 図形を社会に応用できる美しさ
  4. 図形操作等における予想外の着想の美しさ
  5. 図形を具体化して説明できる美しさ
- これらはこれまでの研究会合で発表され

た題材とそれらに対する検討結果、各研究者の知見を基に得られたものである。この類型化は、児童・生徒に対し図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得る指導を考える際に大いに役立つものであると考えられる。

研究で得られたいくつかの知見は各地で開催された学会等で発表されている。2年目の第5回目から第7回目の研究会合の発表題目は以下のようになっている。

#### 第5回研究会合

1. サッカーボールの形を作ろう
2. 敷き詰める活動
3. きれいな形をつくる
4. 正多角形の面積公式
5. 凹四角形で、重心が凹四角形の内部にあるもの
6. 二等辺三角形を書こう
7. シェルピンスキー四面体の実践その2
8.  $1/2$  (半分) がポイントです

#### 第6回研究会合

1. 正方形が変身
2. 重心の考えを用いたチェバ・メネラウスの定理の導入学習  
～実験・観察を取り入れた「数学的活動」による一般化～
3. 等しい長さで作られる図形
4. 図形の合同分解
5. 実験・観察する活動から数学的な考え方を育む教材についての研究  
～「塩の幾何学」の活動を通して～
6. 図形の美しさを実感させる数学的活動の授業  
～シェルピンスキー四面体を利用した風通しのよい日除け模型作り～
7. 二項定理 パスカルの三角形から

#### 第7回研究会合

1. タングラムで正方形を作ろう
2. 和算 ～裁ち合わせ～
3. 中2「平行と合同」単元における星形n角形の新たな扱い方  
～簡潔・統合の美しさ～
4. 正弦定理について
5. 塩の幾何学
6. 数の見方
7. 直方体と立方体
8. ひし形三十面体を作ろう

(3) 3年目の目標は(1),(2)で得られた結論を論文の形に纏めて発表すること、またその知見を基に図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得る図形指導の案を実際の授業にのせて、その結果、児童・生徒が図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得たかどうかを検証することにあつた。1～2年目と同様な計3回の研究会合がもたれた。5つの類型化を考慮した研究協力員による授業実践などにより、その結果として、大まかではある

が以下のような、図形についての美しさを感じ得る指導と展開する際の基本的枠組みが明らかになってきた：

#### [図形についての美しさを感じ得る指導の基本的枠組み]

1. 児童・生徒に困難を感じさせる
2. 図形の美しさに関わる事柄を見出す
3. これまでの流れを振り返り、図形の美しさを感じ得る

また、これらの指導原理に基づいた種々の図形指導の研究結果が論文として纏められ、横浜国立大学教育人間科学部紀要 I に発表された。一部の結果は各研究員により、各地で開催された学会等で発表されている。

尚、3年目の第8回から第10回で検討された題材の題目は以下のようになっている。

#### 第8回研究会合

1. 直線による平面分割の拡張
2. 超立体を考えよう
3. 2次曲線の一般化と発展
4. 四角形の重心を求める方法について
5. レプタイル(複製タイル)の教材化
6. 「清宮の定理」をカブリで操作して見つけたこと
7. 数学史を取り入れた正弦定理の指導
8. 第4学年算数科学習指導案(図を2等分して合同な図形を作る)
9. 図形についての美しさを感じ得る教材開発とその指導  
～今後の課題と一つの方向性～

#### 第9回研究会合

1. カンタベリー・パズルを用いた図形の等積変形
2. 面積は何倍
3. GRAPES を利用した視覚的理解を促す教材例  
～微分法の指導とその拡張～
4. 鳩目返し
5. 「裁ち合わせ」の教材化
6. 折って、切って正方形パズル
7. 三角形の重心から面積の二等分線へ  
～生徒の問いをつなぐ教材開発～
8. つまようじで多面体をつくろう  
～Yogeometry (ヨージオメトリー)のすすめ～
9. 図形についての美しさを感じ得る教材開発とその指導

#### 第10回研究会合

1. 図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させるにはどのように指導したらよいか  
～小学校4年「直方体と立方体」の実践を通して～
2. 「数っておもしろい」(2けたのかけ算)
3. 回転の中心を見つける
4. 平行六面体内の三角形について (Grapes を用いて)

5. 四辺形の中点を結んでできる図形について（コンピュータを用いて）
6. 小学校算数科における平面図形の見方・考え方を深める指導に関する一考察 ～裁ち合わせに焦点をあてて～
7. 現象の仕組みをとらえ広げる活動に焦点を当てた教材開発  
～塩の幾何学を題材として～
8. 研究題目に関連して
9. 三角形の内角の和の公式の発展

(4) 3年間の研究を通じて得られた、児童・生徒が感得できる図形の美しさに対する5つの類型化と、これに基づいた図形についての美しさを感じ得る指導展開に対する基本的枠組みはこれからの図形教育を考える際の大きいなる手助けになることが期待される。そのような意味で、研究当初の目標は十分達成されたと考えている。ただ、これらの指導原理に基づいて図形指導を行った結果、児童・生徒がどれくらい図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得たかについての検証という部分については若干不十分な感が否めない。今後の重要な研究課題である。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計7件）

- ①池田敏和、馬場裕、橋本吉彦、岩立忠、藤原大樹、石谷優行、橋本吉貴、峰野宏祐、東谷洵、五十嵐潤、前田正男、算数・数学科における図形についての美しさを感じ得させる教材開発とその指導、横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ、査読無、No.13、2010、pp.17-39
- ②佐藤潔人、図形概念形成における算数的活動の役割、第43回数学教育論文発表会論文集、査読有、43巻、2010、pp.597-602
- ③峰野宏祐、現象の仕組みをとらえ広げる活動に焦点を当てた教材開発～「塩の幾何学」を題材に～、第43回数学教育論文発表会論文集、査読有、43巻、2010、pp.555-560
- ④池田敏和、奥村利香、小山健仁、岩立忠、純岡尚史、関口慎吾、前田正男、馬場裕、橋本吉彦、小学校算数科における図形についての美しさを感じ得る教材開発、横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ、査読無、No.12、2009、pp.1-12
- ⑤前田正男、池田敏和、藤原大樹、鈴木誠、橋本吉貴、小山直人、石谷優行、小原美枝、馬場裕、橋本吉彦、中・高等学校数学科における図形についての美しさを感じ得る教材開発、横浜国立大学教育人間科学部紀要Ⅰ、査読無、No.12、2009、pp.135-154
- ⑥藤原大樹、図形の美しさを実感させる数学的活動の授業②ーシェルピンスキー四面体を利用した風通しのよい日除け模型作

りー、第42回数学教育論文発表会論文集、査読有、42巻、2009、pp.175-180

- ⑦藤原大樹、図形の美しさと有用性を実感させる数学的活動の授業②ーシェルピンスキー四面体を題材としてー、第41回数学教育論文発表会論文集、41巻、2008、pp.387-392

〔学会発表〕（計14件）

- ①五十嵐潤、平面の分割数の発展的な取り扱いに関する教材開発、第43回数学教育論文発表会、2010年11月13日、宮崎大学
- ②東谷洵、中学校数学科における論証の意義を感じ得させる指導のあり方～「立証」・「説明」の機能に焦点をあてて～、第43回数学教育論文発表会、2010年11月14日、宮崎大学
- ③石谷優行、コンピュータを活用した図形領域授業の実践～数学Bベクトルに焦点をあてて～、第92回全国算数・数学教育研究大会、2010年8月3日、新潟県立新潟高等学校
- ④藤原大樹、中学校における図形についての美しさを感じ得させる数学的活動の授業、第92回全国算数・数学教育研究大会、2010年8月3日、新潟市立宮浦中学校
- ⑤峰野宏祐、実験・観察する活動から数学的な考え方を育む教材についての研究～「塩の幾何学」の活動を通して～、第42回数学教育論文発表会、2009年11月8日、静岡大学
- ⑥佐藤潔人、図形遊びから図形概念づくりへ、第42回数学教育論文発表会、2009年11月8日、静岡大学
- ⑦東谷洵、論証の意義指導に関するこれまでの成果と今後の課題ー中学校図形領域に焦点をあててー、第42回数学教育論文発表会、2009年11月8日、静岡大学
- ⑧小原美枝、中学生の図形に対する意識と学習態度との関連性、第41回数学教育論文発表会、2008年11月2日、筑波大学
- ⑨橋本吉彦、図形についての豊かな感覚・美しさを感じ得させる指導、第41回数学教育論文発表会、2008年11月2日、筑波大学
- ⑩小原美枝、中学生の図形に対する意識に分析ー学年間の比較を中心としてー、第90回全国算数・数学教育研究大会、2008年8月5日、郡山第二中学校

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

前田 正男(MAEDA MASAO)  
横浜国立大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号：00016164

##### (2) 研究分担者

橋本 吉彦(HASIMOTO YOSHIHIKO)  
横浜国立大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号：60000072  
馬場 裕(BABA YUTAKA)

横浜国立大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号：10175549  
池田 敏和 (IKEDA TOSIKAZU)  
横浜国立大学・教育人間科学部・教授  
研究者番号：70212777