様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成24年 3月1 日現在

機関番号：32514
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５００７６１
研究課題名（和文）子どもの推論的活動を支援する図形指導法の開発

研究課題名（英文）Construction of Teaching Method of Helping Pupils' Inferential Activities in Geometry Learning

研究代表者
原田　耕平（HARADA KOHEI）
川村学園女子大学・教育学部・教授
研究者番号：１０２３８１８１

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、小学校4年生を対象とした3年間の縦断的研究法によって、子どもの図形学習における推論的活動の発達を支援する指導法を明らかにすることである。研究結果から、次の結論が得られた。(1)図形の分割・補完・移動に関する図形認識では発達傾向が認められたが、推論の合成を伴う図形認識では発達が困難であった。(2)子どもの推論的活動の発達を支援する図形指導法の開発では、「認知的葛藤による方法」と「弁証-教授学的方法」の有用性が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to construct a teaching method of helping pupils' development of inferential activities in geometry learning based on longitudinal method for the fourth graders in elementary schools for three years. The main results of this study are as follows: (1)Their cognitive development of dividing, compensating and displacing geometrical figures improved with progress of their grades, whereas their cognitive development of geometrical figures with compositions of inferences were retained in the low level. (2)On the construction of teaching method of helping their development of inferential activities in geometry learning, we could clarify that the both of "method by using cognitive conflicts" and "dialectic-didactical method" are very useful.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数学教育
科研費の分科・細目：科学教育・教育工学、科学教育
キーワード：図形、推論、認知発達、小学生、教授法

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

１．研究開始当初の背景

我々は幾何の問題解決における生徒の困難性の原因を解明するとともに、生徒の図形認識と推論の特徴を明らかにした(2003～2004年度)。中学生を対象とした図形の認知発達の研究では､生徒の発達水準の個人差は中学校１年次において出現し、その後拡大していくことを明らかにした(2005～2007 年度)。このような研究結果から、それ以前の学校段階における子どもの認知発達の支援が急務となった。

図形認識の発達研究では、これまで Hershkowitz ら(1987)､Fischbein(1993)､小関ら(1988)、高垣(2000)などの研究が進められてきた。しかし、国内外における図形認識の発達研究は、ほとんどが横断的研究であり、被験者個々の発達プロセスの特徴を明らかにしていない。それに対して本研究は、縦断的研究法によって個々の子どもの認知発達プロセスを明確にし、それに対応した指導法の開発をねらっている。

２．研究の目的

Piaget(1959)が指摘するように、学習には経験に依拠するものと依拠しない認識の獲得がある。子どもの推論的活動をともなう学習では、後者の認知発達的要因が強い影響を与えると考えられる。このような視点から、我々は次のように研究目的を設定した。本研究の目的は、小学校４年生を対象とした３年間の縦断的研究法によって、子どもの図形学習における推論的活動の発達を支援する指導法を明らかにすることである。

３．研究の方法

研究目的を達成するため、次の研究方法をとる。第一に、子どもの図形認識における推論の発達水準を明確にするために、Mesquita(1989)の「図形認識の理論」と Piaget の『意味の論理学』(Piaget et al.1987)を参照する。この水準を用いて小学校４年生を対象として図形認識における推論の発達過程を明確にするために、３年間の縦断的発達調査を行う。第二に、図形認識の発達を支援する教授法を開発するために、ジュネーブ学派の「学習実験」(Inhelder et al. 1974; Bovet et al. 1986)と Brousseau(1998)の『教授学的場の理論』を手掛かりとして図形指導法の理論的枠組みを構築し、教授実験を行う。教授実験の評価では、子どもの推論の発達を明確にするため Piaget の研究後継者 Henriques(2004)の『理由の形成』を参照する。

４．研究成果

(1)子どもの図形認識の発達研究

①調査問題

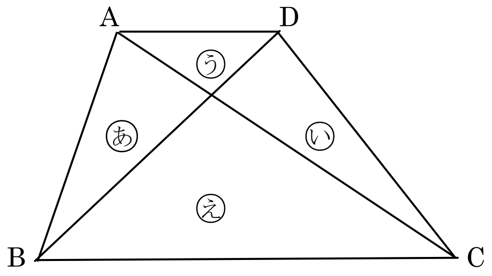
問題の選択については、図形認識の発達指標が明確になるように配慮した。問題１については､Piaget ら(Piaget et al. 1960, p. 302)、問題２と問題３については、Mesquita(1989, pp. 14-15)を参照した。

問題１(4 年～6 年)長方形を１本の直線で２つの同じ面積に分けたいと思います。どのように直線をひけばよいでしょうか。定規をつかってなるべく多くの方法を見つけましょう(図略)。(4ｃｍ×6ｃｍの長方形が 12 個与えられる。最初の 10 個の長方形の各辺には 1cm 間隔の目盛をつけ、残りの２個には目盛をつけない。)

問題２(4 年～6 年)つぎのような形の面積をくふうして求めましょう。くふうして考えた線もかいておきましょう。１つのやり方ができたら、他のやり方も考えてみましょう(図略)。(6 cm×8 cmの長方形で右上端から 3 cm×2 cmの長方形が欠如している複合図形が 4 個与えられる。)

問題３(5 年～6 年)つぎのような台形 ABCD

があります。対角線 AC と対角線 BD をひきました。㋐の三角形の面積と㋑の三角形の面積は同じになります。そのわけを説明しましょう。



②図形に対する認知発達水準の設定

「図形認識のタイプ」（知覚的把握・系列的把握・推論的把握）(Mesquita,1989)の出現に伴い、どのような「推論の形式」（局所的推論・系統的推論・構造的推論）(Piaget et al.1987)が出現するかの視点から、図形認識における推論の発達水準を次のように設定した。

問題 1：水準Ⅰは「知覚的把握」の水準で、分割の誤りや同じ分割が繰り返され、妥当な作図が 4 個程度である水準ⅠＡ、作図のつながりが生まれるが、妥当な作図が 6 個程度である水準ⅠＢを区別した。水準Ⅱは「系列的把握」の水準であり、目盛のある長方形の分割が 8 個程度できる水準ⅡＡ、目盛のある長方形のすべての分割(10 個)が完成できる水準ⅡＢを区別した。水準Ⅲは「推論的把握」の水準で、目盛がない長方形についても分割ができる水準である。目盛のない長方形を含めて全体で 10 個程度の分割ができる水準ⅢＡとすべての長方形について分割を完成できる水準ⅢＢを区別した。

問題２：水準Ⅰは「知覚的把握」の水準であり、面積の意味が理解できない水準ⅠＡと図形の「分解」のみで解決する水準ⅠＢとを区別した。水準Ⅱは、図形の「分解」および「補完」が出現する水準であり、図形の全体－部分関係の認識が可能になる。水準Ⅲは、図形の「分解」と「補完」に加えて「移動」が可能になる水準である。この水準を、図形の平行移動ができる水準ⅢＡと対称図形の合成ができる水準ⅢＢとを区別した。

問題３：水準Ⅰは「知覚的把握」の水準で、㋐と㋑について「形が同じ」「折りたたむと重なる」というような水準ⅠＡと三角形の辺や高さを実測する水準ⅠＢとに分けた。水準Ⅱは「系列的把握」の水準であり、推論の合成が徐々に可能になるが、その「理由」が明確でない。この水準を「三角形 ABC＝三角形 DBC だから」と答えるだけで理由がない水準ⅡＡ、「三角形 ABC と三角形 DBC の底辺と高さが同じ」という理由のみがある水準ⅡＢ、「同じ面積の㋓を引いても残りの㋐と㋑は同じ」という理由のみがある水準ⅡＣに分けた。水準Ⅲでは、図形の「推論的把握」によって「推論の合成」ができ、明確な理由を述べることができる水準である。

③調査対象：I 県公立小学校(A 校)4 年生、3 年間の調査対象者 48 名

④調査時期：各年度、2 月下旬～3 月上旬

⑤調査結果と考察

本報告では、代表的結論のみ示す。

(a)全体集計の結果について

(i)問題１の長方形の分割および問題２の複合図形の分割・補完・移動に関する図形認識では、認知発達傾向が認められた。

(ii)問題３の推論の合成を伴う図形認識では、この段階の子どもにとって認知発達は非常に困難であった。この確認するために、他県公立小学校 4～6 年生 6 名についてインタビュー調査を行ったが、同様な結果が得られた(原田,2011)。

(b)個人集計の結果について

(i) 問題１では、6 年次で水準ⅢＢに到達した子どもは、5 年次ですでに水準ⅢＢに到達しているパターン(17.0%)が見られた。このこ

とは４年次から５年次への水準の上昇によるものであり、4 年次での図形の分割についての認識を促進できる可能性が示唆された。
(ii)問題２では、同じ水準Ⅱ(分割・補完)を保持するパターン(Ⅱ→Ⅱ→Ⅱ)(17.0%)およびゆっくりとした水準の上昇パターン(Ⅱ→Ⅱ→ⅢＡ)(12.8%)が見られた。このことから、5 年次からの図形の動的見方や移動の操作的活動の支援の必要性が示唆された。
(iii)問題３では、低い水準を保持するパターン(ⅠＡ→ⅠＡ)(63.8%)が見られた。その対応として、5 年次での図形の「操作的把握」を促進する活動の必要性が示唆された。

(2)子どもの推論的活動を支援する図形指導法の開発

①推論的活動を支援する図形指導法の枠組み

(i)認知的葛藤による授業の枠組み

この授業の枠組みとして、ジュネーブ学派の学習実験の「認知的葛藤による方法」(Inhelder et al.1974) を参照し、Brousseau(1989)によって設定された「教授学的場」に、我々が構成した「認知的葛藤の場」を導入して、教授段階を設定した。この場では、「定式化の場」で完成した「手続き」では解決できない問題を提示することによって、既有知識の修正(調節)が求められ(認知的葛藤の生成)、さらに子ども自身によって認知的葛藤が克服されるような方向づけが必要となる。

(ii)弁証法-教授学的方法による授業の枠組み

この授業の枠組みとして、ジュネーブ学派の「弁証法-教授学的方法」(Bovet et al.1986)を参照し、上述の「教授学的場」に、我々が構成した「弁証法的対話の場」を導入して、教授段階を設定した。この場では、「定式化の場」で完成した「解法」や解法を実行して得られた「結果(答え)」(定立)を否定する主張(反定立)を提示し、この主張が議論され、それが新しい知識に総合される方向づけが必要となる。

(iii)問題解決の授業の枠組み

提案した２つの実験授業の枠組み(実験群)に対し、通常の「問題解決の授業の枠組み」を統制群とする。我々は、通常の「問題解決の授業の枠組み」として、日本において実施されている典型的な「問題解決の授業」(三輪,1992)を参照して、「問題提示」→「問題解決(自力解決）」→「解決の比較・討議·練り上げ」→「練習と整理（まとめ）」という教授段階を設定した。

②教授実験における推論的活動の評価

1980 年の発生的認識論国際センター(CIEG)の研究会で、Piaget は、《理由は、考察される事物または出来事の意味の１つである》(Henriques,2004,p.307)と定義し、１つの意味は意味の含意によって他の意味をもたらすと指摘している。また理由の固有性は、「再構成(reconstitutions)」より成り立っており、再構成の諸段階は含意の間の含意に基づく１つのシステムの中で、順向的含意と遡及的含意の結合によって定められると述べている。Henriques(ibid.pp.286-7)は、CIEG の実験研究から「理由」の発達水準として、4 つの水準を区別している。我々は、この発達水準を手掛かりとして、図形認識における子どもの「理由」の発達水準を次のように設定した。

水準Ⅰ：対象物の再認的再構成
水準Ⅱ：特別な状況における根拠の再構成
水準Ⅲ：変動可能な状況での根拠の再構成
水準Ⅳ：推論的意味をもつ根拠の再構成

③教授実験の計画

[平成 20 年度]
対象：4 年生

単元名：面積
教授実験のテーマ：複合図形の面積計算
教授実験 1（認知的葛藤による方法）：図形を長方形に分割したり、長方形を補完する方法に対し、三角形を含む図形(認知的葛藤)の面積計算を提示した。
教授実験 2（弁証法−教授学的方法）：図形を長方形に分割したり、長方形を補完する方法(定立)に対し、反定立として「6×5=30 で計算できました。どのように考えたのでしょう？」を提示した。
教授実験 3（問題解決の授業）：図形の分割および補完による方法を定式化した後、類似な複合図形(凹型図形)の問題によって分解、補完による面積計算の習熟を図った。
［平成 21 年度］
対象：5 年生
単元名：図形の角の大きさ
教授実験のテーマ：四角形の 4 つの角の和
教授実験 1(認知的葛藤による方法)：四角形の 4 つの角の和が 360° であることを定式化した後、尖がった鋭角をもつ四角形(認知的葛藤)を提示し、定式を確認させた。
教授実験 2（弁証法−教授学的方法）：四角形を 1 本の対角線によって 2 つの三角形に分解して 180° ×2=360° と定式化したこと(定立)に対し、対角線を 2 本引いた解法(反定立)を提示し、誤りかどうかを議論させた。
教授実験 3（問題解決の授業）：四角形の 4 つの角の和が 360° であることを定式化した後、3 つの角が既知である四角形について残りの 1 つの角の大きさを求める問題を提示し、定式の利用に習熟させた。
［平成 22 年度］
対象：6 年生
単元名：拡大図と縮図
教授実験のテーマ；三角形の拡大図と縮図のかき方
教授実験 1（認知的葛藤による方法）：三角形の拡大図のかき方について、3 つの方法を定式化した後、この 3 つの方法では解決できない四角形の拡大(認知的葛藤)を提示した。
教授実験 2（弁証法−教授学的方法）：三角形の拡大図のかき方について、3 つの方法を定式化した後、「三角形を拡大図のかき方は、この 3 つだけですか？」として定式の否定を与えた。
教授実験 3（問題解決の授業）：三角形の拡大図のかき方について、3 つの方法を定式化した後、「3 つの方法を確かめよう」によって作図条件を確認させた。
④実験対象：Ｉ県公立小学校(B 校)4 年生（3 年間の被験者）
⑤実験時期：各年度 10〜11 月
⑥教授実験の実施結果と考察
　本報告では、代表的結論のみ示す。
(i)「認知的葛藤による方法」では、問題によって与えられた認知的葛藤に対し、子どもは自生的思考によって葛藤を克服した。4 年では「図形の合成」、5 年では「図形の拡大」「角の不変性」、6 年では「方法の合成」の認識が生み出された。
(ii)「弁証法−教授学的方法」では、提示された「反定立」を新しい知識に総合する認識が生み出された。4 年では「図形の移動」の考え、5 年では三角形に分割するという一般な考え、6 年では既習事項に結びつけて説明する演繹的な考えが生み出された。しかし、これらの子どもの考えの生成には、教師による思考の方向づけを必要とした。
(iii)「問題解決の授業」では、定式化の後で、定式を適用する問題（4 年・5 年）、定式を確認する問い（6 年）が提示され、とくに定式の適用では、問題を見て妥当な定式を探索する遡及的推論が生み出された。
(iv)教授実験における子どもの推論的活動の

評価では、「認知的葛藤による方法」および「弁証法-教授学的方法」での授業において、4 年では「理由」の水準Ⅱ(特別な状況における根拠の再構成)、5 年では水準Ⅲ(変動可能な状況での根拠の再構成)、6 年では水準Ⅳ(推論的意味をもつ根拠の再構成)へと、推論における「理由」の認識の発達が明らかになった。

他の教材による教授実験によって方法の一般化を図ることが、今後の課題である。

［主な引用・参考文献］

Bovet,M.,Parrat-Dayan,S.et Vonèche,J. (1986) Causalité et Apprentissage. Cahirs de Psychologie Cognitive.6(6), pp.615-631.

Brousseau,G.(1998) *Théorie des situations didactiques.* La Pensée sauvage, éditions.

Fishbein,E.(1993)The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, Vol.24,pp.139-162.

Inhelder,B.,Sinclaire,H. and Bovet,M. (1974) *Learning and the Development of Cognition*. Routledge & Kegan Paul.

Henriques,G.(2004) *La formation des raisons*. Mardaga.

Mesquita,A.(1989) *L'infulence des aspects figuratif dans l'argumentations des élèves en géométrie*. Thèse Université Lous Pasteur, Strasbourg.

Piaget,J.(1959) *Apprentissage et connaissances*, EEG, Vol.Ⅶ

Piaget,J. et Garcia,R.(1987) *Vers une logique des significations*. Murionde.

小関熙純・家田晴行・国宗進(1984)図形認知の発達的研究―「平行四辺形」概念の形成過程について.日本数学教育学会数学教育論究,Vol.41-42,pp.3-23.

三輪辰郎(1992)『日本とアメリカの数学的問題解決の授業』,東洋館

５．主な発表論文等

〔学会発表〕(計 5 件)

① 原田耕平、図形に対する子どもの認知発達水準の同定の方法―小学生を対象として―、数学教育学会誌臨時増刊、2009 年度数学教育学会秋季例会発表論文集、pp.94-96、2009 年 9 月 26 日、大阪大学

② 原田耕平、図形に対する子どもの認知発達の特徴―小学生を対象として―、日本数学教育学会、第 42 回数学教育論文発表会論文集、論文発表の部、査読有り、pp.349-354、2009 年 11 月 7 日、静岡大学

③ 原田耕平、子どもの推論的活動を支援する図形指導法の枠組み、数学教育学会誌臨時増刊、2010 年度数学教育学会春季年会発表論文集、pp.30-32、2010 年 3 月 25 日、慶応大学

④ 原田耕平、図形に対する子どもの推論的活動の特徴―小学生の演繹的推論の可能性―、日本数学教育学会、第 43 回数学教育論文発表会論文集、論文発表の部、査読有り、pp.609-614、2011 年 11 月 14 日、宮崎大学

⑤ 原田耕平、図形に対する子どもの認知発達の特徴―小学校 4 年生を対象とした 3 年間の縦断的調査―、日本数学教育学会、第 44 回数学教育論文発表会論文集、論文発表の部、査読有り、pp.513-518、2012 年 11 月 13 日、上越教育大学

６．研究組織

(1)研究代表者

原田耕平(HARADA KOHEI)

川村学園女子大学・教育学部･教授

研究者番号 10238181