

機関番号：12102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20510126

研究課題名（和文） レジームシフトを考慮した最適投資戦略に関する研究

研究課題名（英文） Optimal investment strategies with regime shifts

研究代表者

牧本 直樹 (MAKIMOTO NAOKI)

筑波大学・大学院ビジネス科学研究科・教授

研究者番号：90242263

研究成果の概要（和文）：金融経済環境の変化をレジームシフトとしてモデル化し、将来的なレジームの変化を織り込んだ最適投資戦略をいくつかの状況設定に対して導出した。また、モデルパラメータが最適投資戦略に与える影響など最適投資戦略の性質を分析した。さらに、実データを用いて実際のレジームの変化を推定したり、現実の投資行動と比較することで、レジームシフトを考慮することが現実の投資行動をより適切に説明し、また投資実務においても有用であることを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In this research, we model the changes of the financial/economic environment as regime shifts and derived the optimal investment strategy by taking future regime shifts into account. Characteristics of the optimal investment strategy such as the effect of the model parameters are also investigated. Analyses based on actual regime shifts estimated from real data show the importance of introducing regime shifts in that it explains actual investment behavior more adequately and gives useful insight into practical investment management.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：金融工学

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学

キーワード：投資戦略，最適化，ポートフォリオ，レジームシフト

## 1. 研究開始当初の背景

レジームシフトとは、金利や各種のマクロ経済変数などの時系列的な構造が、レジームと呼ばれる潜在的な状態に依存して推移するモデルである。Hamilton(1989)がビジネスサイクルの変化に対してレジームシフトを導入して以来、さまざまなデータに対して多

くの実証分析が行われ、レジームシフトがこうしたデータの時系列的な特徴をよりの確に記述できることが示されている。

このように、金融や経済における実証的な側面からは、レジームシフトモデルはある程度確立され、その有用性も認識されているが、そうした結果の投資戦略への応用については理論的にも実証的にも十分な研究は行わ

れていない。研究開始当初においては、Guo et al.(2005)やMakimoto(2006)が、リアルオプション評価モデルのパラメータ変動にレジームシフトを導入して最適投資時点を導出した研究があった程度である。レジームシフトモデルの実証的な有用性を考えると、レジームシフトを考慮した最適投資戦略の一般的なフレームワークを構築することは、投資戦略の高度化の面で学術的にも実務的にも十分に意義のある研究と考えられる。

## 2. 研究の目的

上記のような問題意識にもとづき、本研究ではレジームシフトを考慮した最適投資戦略に関して以下の点を明らかにすることを目的とする。

### (1) レジームシフトを考慮した最適投資戦略の解析

前述したようにレジームシフトを考慮した最適投資戦略の研究は限られているため、より一般的なフレームワークの下で最適投資戦略がどのように決まるのかを理論的に明らかにする。

#### ① 最適投資時点の導出の一般化

Guo et al.(2005)やMakimoto(2006)が分析した最適投資時点を求める問題に対して、レジームシフトする変量が異なる問題や、より一般化された設定での問題を解析し、最適投資時点を導出する。具体的には、投資コストがレジームに依存して変化する場合（最近問題となっている資源などコモディティの高騰を想定した状況設定）、住宅ローンの借り換えを投資と考えると金利がレジームシフトする条件下での最適借換政策（サブプライムローン問題に関連）などを分析する。

#### ② 動的な最適投資問題

①が原理的には1回の投資最適化であるのに対し、各時点ごとにレジームを含めた状況を観察しながら最適投資を考慮する問題を検討する。具体的には、平均-分散法によるポートフォリオ選択において、投資対象資産のリターン平均や共分散がレジームシフトする状況を考え、割引期待効用を最大化する各期のリバランスを導出する。可能であれば、取引コストの導入やファクターを介した最適投資への拡張も検討する。

### (2) レジームシフトの推定に関する実証研究

レジームシフトモデルの推定方法としては、Hamilton(1994)やKim and Nelson(1999)によるEM(Expectation-Maximization)アルゴリズム

と、状態空間モデルに対するベイズ推定の2種類の方法がよく知られている。本研究では、推定に関する新たなアルゴリズムの開発を目的とはしないが、(1)の最適化モデルの応用を念頭に、いくつかのタイプの実データに対して推定を行い、上述した推定アルゴリズムの推定精度の検証を行う。特に、多資産の時系列データにおいては推定パラメータがかなり増えることが予想されるため、そうした状況での推定の安定性や初期値依存性などを確認する。また、実際に推定されたレジームシフトの金融経済的な含意を、これまでの先行研究と比較考察する。

### (3) 観察される投資行動との比較分析

(1)で分析した最適化投資戦略と(2)で推定したレジームシフトを組み合わせて、いくつかの投資問題に対する実際の最適投資戦略を明らかにする。また、その性質を調べることで、金融経済環境の変化が投資戦略にどのような影響を与えているかを分析する。さらに、現実の投資行動と比較することで、モデルから得られた最適投資戦略がどの程度実行されているのか、両者に乖離がある場合はその原因として何が考えられるのか、といった点を考察する。

具体的な比較分析の対象としては、米国で1980年代～90年代にかけて観察された金利が十分に下がらないうちに借り換えを行う現象や、HML(High minus Low)やUMD(Up minus Down)などのファクターポートフォリオのリスクとリターンのレジーム変化と最適投資行動の関係などが挙げられる。

## 3. 研究の方法

研究方法は目的に応じて大きく3つに分けられる。

### (1) 最適投資戦略の解析

一般に、総期待効用あるいは総期待利得を最大化する最適投資戦略は、最適投資戦略の下での価値関数に対する

HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程式を導出し、それを解くことで求めることができる。ただし、HJB方程式を解いて解を解析的に求めることができるかどうかは、問題の構造に強く依存する。そのため、問題の定式化においては、より現実的な設定を求める一方で、HJB方程式の解析可能性に対する検討も同時並行的に行う必要がある。そのため、解析解をもつことが知られているいくつかのモデルをベースに、それらを変形あるいは拡張しながら分析を行うなどの方針を採用した。

また、レジームシフトを導入することによ

る大きな問題として、HJB 方程式が各レジームに対する価値関数の連立方程式となる（レジームごとに HJB 方程式が得られるため）ことが挙げられる。この連立（偏）微分方程式が解析的に解けるモデルは極めて限られるため、変数を縮約することによる準解析解の導出や、それも難しい場合は数値計算による解法を検討した。

HJB 方程式は複数の未知パラメータを含むが、それらはバリューマッチングとスムーズペースティングの2種類の境界条件から（数値的に）決定される。この境界条件も非線形方程式となるため、数値解法の工夫が求められる。

## (2) レジームシフトの推定

研究の目的(2)で述べたように、レジームシフトの推定方法としては EM アルゴリズムと状態空間モデルに対するベイズ推定を利用した。アルゴリズムの枠組は確立されたものであるが、具体的な推定の手続きはモデルに依存するため、各モデルに対して推定プログラムを作成した。また、多資産のデータ分析では推定パラメータが百以上、最大では数百に達するケースもあるため、そのような場合の推定の安定性や推定結果の初期値依存性については、十分な注意を払って分析を進める必要がある。

## (3) モデルと実際の投資行動の比較分析

最適投資戦略の理論モデルに推定されたデータを適用して過去の金融経済環境下での最適投資を求め、その特徴を調べる。着眼点としては、金利においては上昇局面と下降局面における投資行動、株式ポートフォリオにおいては、リスクが高い局面でのリターン特性と投資行動の関係などである。また、分析対象のモデルにおいて実際の投資行動を表す観測可能な代理指標を考へて、その指標の実際のデータと理論モデルから得られる最適投資行動を比較する。

## 4. 研究成果

研究成果は、最適投資問題のモデル化によって、4つの理論研究（このうち2つは併せて実証研究も含む）と1つの実証研究に大別することができる。以下、それぞれの概要を示す。

(1) 投資対象資産の価値過程が幾何ブラウン運動にしたがい、そのスケール（レジーム）が連続時間マルコフ過程で変化するという設定の下で、最適な投資時点が価値過程に関する閾値型政策、すなわち価値過程が初めて

閾値に到達する時点であること、閾値はレジームに依存して決まることを示した。また、レジームを支配するマルコフ過程の推移速度行列が中心回帰的な性質を持つ場合には、閾値の順序がスケールの順序に応じて決まることを示した。この結果を利用することでレジーム数が増えたときの計算負荷と計算精度を大きく改善することができる。

HJB 方程式は連立偏微分方程式となるため解析解は持たないが、6つの未知係数を数値的に決定する部分については、境界条件の非線形方程式をうまく組み合わせることで、実質的に1変数に帰着することができた。そのため、数値的には容易に解を求めることができる。

価値過程のボラティリティをはじめとするモデルパラメータが最適投資戦略に与える影響を調べるため数値実験を行い、影響の大きいパラメータの同定や、レジームを考慮しない場合との比較考察を行った。

(2) 家計の住宅ローンを念頭に、金利低下局面での最適な借換政策を分析した。

Agarwal, Driscoll and Laibson(2002)が提示した金利がブラウン運動する環境での最適借換問題に対して、金利変動のドリフトとボラティリティがレジームシフトするように拡張することで、金利低下や金利上昇局面を表現し、金利の将来変化を織り込んだ最適な借換政策を導出した。

最適政策は現在の借入金利から一定水準（借換金利差）下がったところで借換を行うという閾値型で、レジームに依存する借換金利差は非線形連立方程式の解として与えられる。この方程式は陽解を持たないため、効率的に解くための反復解法を開発した。

数値例によってレジーム変化を考慮しない近視眼的な借換と本モデルの結果を比較すると、金利低下局面では借換が遅れ、上昇局面では早まる現象が観察された。また、米国住宅ローン市場を対象とする実証分析を行い、具体的な借換金利差を計算した。その結果、これまで報告されていた結果よりも、実データに整合的な借換行動が得られ、従来からパズルと呼ばれさまざまな説明が提案されてきた実際の借換行動が、本モデルの分析からは一定の経済合理性を持つとの示唆を得ることができた。

(3) 家計効用が生涯消費水準のみならず、他者との相対的な資産水準にも依存するフレームワークを提案した Bakshi and Chen(1996)、借入金利が貯蓄金利を上回るもとで Merton の最適消費投資問題を解析的に解いた Xu and Chen(1998)のモデルを包含し、これに金利や資産収益プロセスがレジームスイッチする下でのモデル拡張を試みた。

こうした現実的（借り入れ金利が安全利子率を上回る）かつ一般的な枠組み（効用関数が消費のみならず資産水準にも依存する）で、収益プロセスがレジームスイッチするもともども、家計の最適行動を準解析的に導出したのが、本研究の大きな特徴となっている。なお、シングルレジームのもとでは解析解を導出している。

準解析解から得られたモデルの主要な結論は、第一に、最適投資行動は現在のレジームに依存して決定されるのに対して、最適消費行動は将来のレジーム変化を考慮して決定されること、第二に、他者の資産変動プロセスにレジームスイッチを導入すると、投資対象となるリスク資産や金利プロセスが一定でも、最適な消費投資ポリシーがレジームに応じて変化しうること、を示した点にある。こうした解析的な特徴には、借入金利が貯蓄金利を上回る分、リスク資産投資が保守的となる Xu and Chen(1998)の特徴も保持されている。

最後に、準解析的な解を用いて容易に計算される数値例を用いて数量的なモデル特性の比較考察した。

(4) アクティブ投資で利用されるファクターポートフォリオにおいて、レジームシフトを考慮した最適資産選択の研究を行った。まず、ファクターの時系列特性を調べるために、過去 50 年余りのデータを用いて Fama-French(1993)の 3 ファクターモデルの推定を行い、レジームシフトを導入することでより説明力の高いモデルが得られることを確認した。特にローリスク・ハイリターンとハイリスク・ローリターンという 2 レジームが存在することを明らかにした点は、これまでの研究との比較において興味深い結果である。

最適投資問題としては、通常の平均一分散の枠組に取引量に応じた 2 次の取引コストを加え、さらに時系列パラメータや取引コスト行列がレジームシフトする多期間の動的な資産選択問題を定式化した。レジームシフトによってベルマン方程式が連立非線形方程式となるため、それを数値的に解くための効率的なアルゴリズムを開発し、それをもとに最適投資戦略を準解析的な形で導出した。なお、取引コスト行列がレジームに依存しない場合や、さらに誤差共分散行列に比例する特殊なケースでは、最適投資戦略を解析的に求めることが可能である。

得られた最適ポートフォリオは、現在のポートフォリオとターゲットポートフォリオの線形結合で表すことができ、後者はレジームの影響を強く受けることが明らかとなった。モデルパラメータが投資戦略に与える影響については、特殊ケースでは最適解から直

接分析を行い、一般的なケースについては実データをベンチマークとする数値計算をもとに詳細な分析を行った。

(5) 金融データのレジーム特性の分析として、アクティブ投資における重要な指標であるバリューとモメンタムのファクター構造を分析した。バリューは平均回帰的なレジームシフトの底または頂上付近での投資を目的とし、モメンタムは上昇および下降が継続する状況での投資を目的としている。分析では、業種、規模、スタイルなどさまざまなファクターで構成されるフィルターを適用して、バリューとモメンタムを構成する主要なファクターを同定した。また、同定したバリューとモメンタムの構造をもとに投資戦略のバックテストを行い、パフォーマンスやリスク量の計測を行った。特にリスク計測では、大きな損失の発生確率に影響する裾指数が、フィルターによってどの程度低下するかを極値理論ならびに実証分析から明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

- ① Takahiro Komatsu and Naoki Makimoto, Dynamic investment strategy for factor portfolios with regime switches, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 2011, forthcoming.
- ② 小松高広・牧本直樹, 株式ポートフォリオにおけるファクター間相関と裾指数, 統計数理研究所共同研究リポート, 査読無, Vol. 246, 2010, 80-94.
- ③ Naoki Makimoto, Optimal time to invest under uncertainty with a scale change, Journal of the Operations Research Society of Japan, 査読有, Vol. 51, 2008, 225-240.
- ④ Toshio Kimura and Naoki Makimoto, Optimal mortgage refinancing with regime switches, Asia-Pacific Financial Markets, 査読有, Vol. 15, 2008, 47-65.

〔学会発表〕（計 6 件）

- ① 牧本直樹, 条件付き相関について, 極値理論の工学への応用, 2010 年 12 月 3~4 日, 統計数理研究所.
- ② Naoki Makimoto, Optimal execution strategy with stochastic liquidity and recursive market impact, ファイナンスのための数理ワークショップ, 2009 年 9 月 25 日, 早稲田大学.

- ③ Toshio Kimura and Naoki Makimoto,  
Optimal investment with direct  
preference for wealth, higher  
borrowing rate, and regime switches,  
日本ファイナンス学会, 2009年5月9～  
10日, 青山学院大学.

[その他]

ホームページ等

<http://www.gssm.otsuka.tsukuba.ac.jp/professor/makimoto.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

牧本 直樹 (MAKIMOTO NAOKI)

筑波大学・大学院ビジネス科学研究科・教授

研究者番号：90242263