

機関番号：14401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20510135

研究課題名（和文）ジャンプを伴う価格変動を仮定した資産の運用と価格付けに関する総合的研究

研究課題名（英文）Comprehensive Studies on Financial Asset Management and Asset Pricing under Assumptions of Price Processes with Random Jumps

研究代表者

大西 匡光（OHNISHI MASAMITSU）

大阪大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：10160566

研究成果の概要（和文）：ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率の変動を持つ金融資産・変数に関する資産運用や、それらを原資産・原変数とする各種金融デリバティブ（金融派生資産・契約）の裁定価格付け・複製・リスクヘッジとそれらを用いたリスク・マネジメント、などについて、それらのモデル化・定式化、理論的分析、アルゴリズム・数値的方法、等、について総合的な観点から研究を行い、多くの新しい成果を得た。

研究成果の概要（英文）：Under the assumption that the prices of financial assets and/or values of financial variables follow some diffusion type stochastic processes with random jumps, we have been tried to execute comprehensive studies on financial asset management and arbitrage pricing/replication/hedging of various financial derivatives (derivative assets and contracts) from the various viewpoints of modeling and formalization, theoretical analysis, algorithmic and numerical methods, and so on, and we have obtained a lot of new fruitful results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	1,080,000	4,680,000

研究分野：社会・安全システム科学

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム

キーワード：ファイナンス・金融工学，ジャンプを伴う拡散過程，最適停止，確率制御，インパルス制御，自由境界問題，準変分不等式

1. 研究開始当初の背景

金融工学の標準的な理論モデルでは、金融資産・変数の確率変動としては拡散過程を仮定することが多い。すなわち、金融資産・金融変数の変動は連続なパスを持ち、パスを不連続とするような急激な変動は無いと仮定する。さて、例えば Black-Scholes 市場のように資産価格変動が連続なパスを持つ拡散過程に従う場合とは異なり、ランダムなジャンプを伴う場合、そのジャンプ・リスクを市場で取引される資産・契約の売買によって

は、ヘッジすることはできないため、デリバティブのペイオフを完全に複製することはできず、したがって、デリバティブの価格を一意的に定めることができないという市場の非完備性の問題に直面することになる。

ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける、資産選択問題、ポートフォリオ選択問題、デリバティブの価格付け・複製・リスクヘッジの問題、等の重要性については、比較的早くから認

識されているものの、その扱いが困難であることと、それらに対する方法論が未整備であったため、残念ながら、いまだ標準理論と位置付けられる成果が得られていないのが現状であり、ファイナンス・金融工学における古くて新しい問題と言える。

連続なパスを持つ拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルに関しては、伊藤積分に基づく確率解析や確率制御理論の適用が多大な成功を収め、現在の金融工学・数理ファイナンスの一大ブームをもたらしたことは、およそ異論のないところである。一方、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルの場合の諸問題に対して、Lévy過程に基づく確率解析、および確率制御理論における新分野であるインパルス制御理論の適用の可能性に期待が寄せられている。このインパルス制御理論では、ランダムに変動する状態過程の位置を瞬時に移動させるような制御（インパルス）を許し、所与の費用構造のもとで、インパルスを与えるタイミングとその大きさの最適化を図ることを問題とし、最近では、経済学・ファイナンス・金融工学への応用研究も活発になされ始めている。

2. 研究の目的

本研究では、上述の最近の研究動向を踏まえ、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数に関する資産運用や、それらを原資産・原変数とする各種金融デリバティブ（金融派生資産・契約）の裁定価格付け・複製・リスクヘッジとそれらを用いたリスク・マネジメント、などについて、それらのモデル化・定式化、理論的分析、アルゴリズム・数値的方法、等、について総合的な観点から研究を行うことを目的とする。

3. 研究の方法

ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける (i) 資産選択問題 (ii) ポートフォリオ選択問題 (iii) デリバティブの価格付け・複製・リスクヘッジの問題、等、の金融工学的諸問題、の重要性については、比較的早くから認識されているものの、その扱いが困難であることと、それらに対する方法論が未整備であったため、残念ながら、いまだ標準理論と位置付けられる成果は得られていないのが現状であり、ファイナンス・金融工学における古くて新しい問題と言える。

連続なパスを持つ拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した

金融市場モデルに関しては、伊藤積分に基づく確率解析や確率制御理論の適用が多大な成功を収め、現在の数理・計量ファイナンス・金融工学の一大ブームをもたらしたことは、およそ異論のないところである。

一方、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルの場合の諸問題に対して、Levy過程に基づく確率解析、および確率制御理論における新分野であるインパルス制御理論の適用の可能性に期待が寄せられている。このインパルス制御理論では、ランダムに変動する状態過程の位置を瞬時に移動させるような制御（インパルス）を許し、所与の費用構造のもとで、インパルスを与えるタイミングとその大きさの最適化を図ることを問題とし、最近では、ランダムに変動する為替レートを適正な水準に制御するための政府・中央銀行の介入時期を決定する問題、取引費用を考慮した場合の最適ポートフォリオ選択問題、等々、経済学・ファイナンス・金融工学への応用研究も活発になされ始めている。

本研究では、こうした最近の研究動向を踏まえ、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける金融工学的諸問題、とりわけ (i), (ii), (iii), 等に対して、モデル化・定式化の検討から始めて、それらに対する解析的・数値的な金融工学手法の確立を目標とした総合的な研究を試みた。

本研究を始めるに当たって、まず、現在における世界の研究状況を正しく把握するため、

- (1) 最新の結果を収めた国内外の学術文献を迅速に入手し、
- (2) 国内外の指導的研究者との活発な情報・意見交換を行った。とりわけ、インパルス制御理論の経済学・ファイナンス・金融工学への応用研究に関連する情報を早急に収集した。

その目的のために、関連する研究を行っている国内の指導的研究者を迎えて、小規模な研究会・セミナーを開催して、情報提供をお願いした。また、国内外において関連する国際シンポジウムも世界の各地で頻繁に開催されるので、適当な機会を見つけて出席し、最新の先端研究動向を調査した。

本研究では、上記の (1), (2) を通じて知り得た、他の指導的研究者・研究グループの研究成果との比較・検討を行いながら、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける (i), (ii), (iii), 等々の金融工学的諸問題へのインパルス制御理論の応用に関して、

(3)既に得ている成果を、より発展させることを試みる。とりわけ、金融資産が多数存在する場合の問題、など、多次元の問題への拡張を課題とした。

また、それと同時に、

(4)ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける金融工学的諸問題のモデル化・定式化についての新しいアプローチの可能性を検討した。

金融工学における従来の標準的な理論モデルにおいては、金融市場として連続なパスを持つ拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した完備市場モデルが想定され、その際、(i),(ii),(iii),等の多くは、(A)固定境界あるいは自由境界の偏微分方程式、(B)変分不等式、(C)準変分不等式、(D)Hamilton-Jacobi-Bellman方程式、等々に帰着されるが、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルの場合は、微分・積分演算、最適化演算を含む、より取り扱いの困難な(一般的には)非線形な関数方程式・不等式を解く問題に直面することになる。そうした問題に対して、目に見える解を導出することを目標として、

(5)帰着された関数方程式・不等式の解の存在・一意性・正則性について解析的な吟味を行い、

(6)その解析結果を踏まえ、効率的で数値的にも安定な数値的解法の設計を試みた。

さらに、

(7)十分な数値実験を実行することを通じて、解に関する知見を得て、数値的解法を、より洗練化することを試みた。

4. 研究成果

本研究は、最近の関連する国内外の研究動向を踏まえ、ランダムなジャンプを伴う拡散過程で記述される確率的変動を持つ金融資産・変数を仮定した金融市場モデルにおける金融工学的諸問題に対して、モデル化・定式化の検討から始めて、それらに対する解析的・数値的な金融工学手法の確立を目標とした総合的な研究を試みるものであった。

研究期間の3年間に渡り、現時点での世界の研究状況を正しく把握するため、最新の結果を収めた国内外の学術文献を迅速に入手するとともに、国内外の学会、ワークショップ、シンポジウム、セミナー、研究会に出席・参加し、指導的な研究者や新進気鋭の研究者との活発な情報・意見交換を行った。とりわけ、ファイナンス・金融工学に現れる、ランダムなジャンプを伴う拡散過程に対する様々

な最適停止問題を、自由境界値問題として定式化した上で、スムーズ・フィット、あるいはスムーズ・ペースティングと呼ばれる原理に基づいて、解析的・準解析的に、あるいは数値的に解く方法論について、徹底的なサーベイを行った上で、最近の研究動向を調査した。

他にも、自らの金融資産の売買取引が、その市場価格にインパクトを与えるような大きな投資主体の最適執行戦略を導出する問題への応用に取り組み、一定の結果を得た。

金利の期間構造モデルについての最近の動向、とりわけアフィン期間構造モデルについての最新の研究成果をもサーベイした。また、そうした新しい金利の期間構造モデルのもとで、金利変動リスクをヘッジする手段を与える、いくつかの重要なエキゾチックな金利デリバティブの価格付けについての研究を推し進めた。

さらに、多様なファイナンス意思決定状況において、様々なカテゴリーのリスクを想定し、投資主体のリスク回避性が意思決定に与える影響に関する比較静学についての研究をも推し進めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Ohnishi, M. and Osaki, Y., "Comparative Risk Aversion under Background Risk Revisited," *Economic Research International*, Vol. 2010, Article ID 180478, 5 pages, URL:<http://www.hindawi.com/journals/econ/2010/180478/ref/>, 2010 [査読有].

Ito, D., Ohnishi, M., and Tamba, Y., "Pricing of a Chooser Flexible Cap and its Calibration," *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, Vol. 27, Iss. 2, pp. 243-256, 2010. [査読有]

Kunou, S. and Ohnishi, M., "Optimal Execution Strategies with Price Impact," 「ファイナンスの数理解析とその応用」, 数理解析研究所講究録 1675, 京都大学数理解析研究所, 2010年2月, pp. 234-247 [査読無].

[学会発表](計5件)

大西匡光,「確率インパルス制御とそのファイナンス・金融工学への応用」於:計測自動制御学会,第10回制御部門ワークショップ「確率微分方程式の基礎と応用~確率的ダイナミクスの理解を目指して~」,2010年3月15日(月),熊本大学工学部(黒髪キャンパス南)[招待講演].

久納誠矢・大西匡光,「価格インパクトを考慮した最適執行戦略」,日本オペレーションズ・リサーチ学会2010年春季研究発表会,2010年3月4日(木),首都大学東京南大沢キャンパス.

久納誠矢・大西匡光,「価格インパクトを考慮した最適執行戦略」,京都大学経営管理大学院金融工学GPセミナー,2009年12月3日(木),京都大学・経営管理大学院[招待講演].

久納誠矢・大西匡光,“Optimal Execution Strategies with Price Impact,”京都大学数理解析研究所研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」,2009年11月27日(金)京都大学数理解析研究所.

大西匡光,「リスク尺度再考」,不完全情報下での実践的経営意思決定に関する産学連携プロジェクトにおける研究,2008年11月27日(木),東北大学大学院・経済学研究科[招待講演].

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大西 匡光 (OHNISHI MASAMITSU)
大阪大学・大学院経済学研究科・教授
研究者番号:10160566