様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 4 月 26 日現在

機関番号：13902
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５３０８１５
研究課題名（和文） テクノロジーを利用した数学的探究における意志決定の様相と授業設計のための指針
研究課題名（英文） Decision making in the mathematical inquiry using technology and guide line for instructional design

研究代表者
飯島 康之（IIJIMA YASUYUKI）
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号：30202815

研究成果の概要（和文）：テクノロジーの利用によって，限られた時間の中で行える数学的探究は大きく変わる。特に観察可能なデータは増え，実行可能な方法も増える。観察したデータのどこに注目し，どう解釈・評価し，次に何をしようと思うのか，問題をどう再定式化するのかによって，数学的探究の多様性が広がっていく。本研究では，その様相を捉えるために，(1) テクノロジー（主として作図ツール *Geometric Constructor*）を利用した 20 ほどの事例に関して数学的探究の多様性のケーススタディを行った。(2) 自身が行った授業に関する意志決定の様子を明らかにし，(3) それらを踏まえた教材開発・授業設計・授業の指針を明らかにして，学部や大学院の授業のカリキュラムの中に組み込むと同時に，(4)並行して附属学校において研究授業の開発・実施・検討等を行い，両者を連携させた。

研究成果の概要（英文）：Using technology in mathematical investigation, we can observe more data, and we can use more strategies to solve the problems. We have many choices in mathematical investigation; which data is important, which strategy is suitable, how should I interpret data and evaluate a solution, and which re-formulation of problem is suitable. To clarify them and to make guide line to make a instructional design of classroom activity about mathematical investigation using technology, we have done as follows ; (1) we made 20 case studies of mathematical investigations using technology (mainly, dynamic geometry software *Geometric Constructor*), (2) we made two case studies of our lesson from viewpoint of teacher's decision making, (3) based on them, we made some guide-line for instructional design of mathematical lesson using technology, which was used in undergraduate and graduate program of mathematics education (4) and based on them, we have designed new mathematical investigations in our attached junior high school.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,500,000	450,000	1,950,000
２００９年度	700,000	210,000	910,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数学教育学
科研費の分科・細目：教科教育学
キーワード：科学教育，数学教育，テクノロジー利用，数学的探究，授業設計

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

１．研究開始当初の背景

(1) 数学そのものは普遍的・抽象的な存在であるが，数学的探究は人間が行うことといであり，使える知識・技能・道具・時間等によって大きく変化する。筆者は，作図ツール Geometric Constructor(以下GCと略す)の開発を通して，ソフトの設計・開発を，数学的探究をより深く・広く変えるための道具として位置づけてきたが。さらに，その影響としての数学的探究の変化を明らかにするとともに，それを適切に反映した授業の設計を目指していた。

(2) GCに関する教材開発・授業研究は1990年代より行ってきた。環境は，コンピュータ室でのスタンドアロンの機器，普通教室でプロジェクタ１台の使い方，普通教室でネットブック 10 台くらいの使い方など，多様化してきた。また，解説，問題提示・議論，課題分割型グループ別学習，グループ別/個別探究/スキル学習，コラボレーション，個別学習など，学習形態を想定した学習環境を開発してきた。様々な研究協力者との共同研究の中で明らかになったのは，数学教育におけるコンピュータ利用の授業を改善していく上で何が重要かということである。

作図ツール等において新しい機能は新しい実験を可能にする。しかし，それを見せるだけでは効果的な授業は成立しない。特にプレゼン的な授業においては，問題場面の提示や議論の手段としてコンピュータを使えるが，生徒自身がコンピュータを操作し，その機能自身を使って探究を進めるわけではなく，探究自身は紙と鉛筆等によって行うことが多い。そこで重要になるのは，生徒に内在する多様性である。観察・解釈・判断・問題などの多様性をうまく引き出すことが授業の中で重要である。同時に，「次に何をしたいのか」等の意志決定が重要であることがわかった。

２．研究の目的

(1)数学的探究における観察と意志決定の多様性を明らかにする

(2)それらはテクノロジーを使うことで，どのように変化するかを明らかにする

(3)それらを元にして，テクノロジーを利用したプレゼン的な授業のための設計の指針を明らかにする

３．研究の方法

(1) 20程度の問題に関して，紙と鉛筆での数学的探究と対比しながら，テクノロジー(主として作図ツール，グラフ描画ツール，Excel，自主開発したツール)を使った数学的探究では，どのような点に数学的探究の多様性が広がるかを明らかにする。

(2) (1)の中においてこれまで授業を行ったものに関して，数学的探究の観点から見た授業の分岐点を明らかにする。

(3) 内省法によって，(授業前に想定しておいく複数の選択肢を踏まえて)，授業の中でどのような意志決定を行ったかについて明らかにする。

(4) (1)～(3)を踏まえて，数学的探究の多様性を配慮した教材開発・授業設計の指針を明らかにする。

(5) (4)を踏まえた教材開発・授業設計・授業の実施，協議会を毎年行う。

(6) (4)の成果および(5)のプロセスを学部や大学院の授業と連携して活用し，その有効性を検討する。

４．研究成果

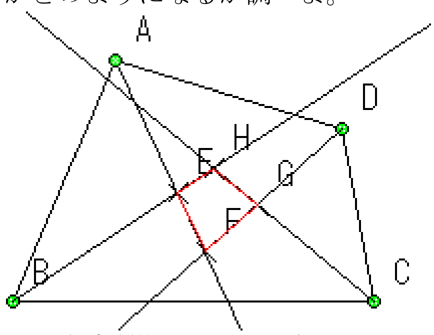
(1) 20 程度の問題に関して，テクノロジー(主として作図ツール，グラフ描画ツール，Excel，自主開発したツール)を使った数学的探究の多様性の様子をケーススタディを行った。

特に作図ツールを利用したものは，GCWiki(http://iijima.auemath.aichi-edu.ac.jp/gcwiki/)の「事例」などに収録した。

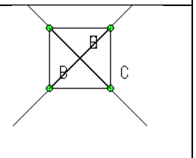
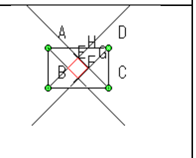
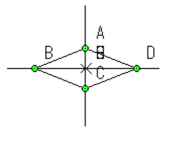
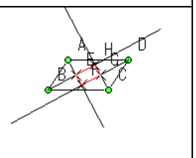
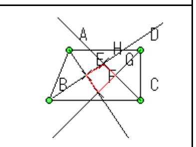
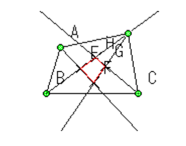
多様性が生まれる分岐点として，観察，解釈，次に取り組みたい問題，次に調べてみたいことなどが明らかになった。また，現実の問題を扱っている場合には，最初の問題状況に対して，モデル化を行い，数学的作業を行った結果に対する評価と，それを基にした再定式化のプロセスの重要性が関わることが明らかになった。それらの中からいくつかを例示する。

①図形を調べる手段としての対応表とそこから生まれる多様性

問題：四角形 ABCD の 4 つの角の二等分線を引き，図のように，それらの交点を E,F,G,H とするとき，ABCD の形を変えたときに，EFGH の形がどのようになるか調べよ。



このような問題を調べる上でもっとも基本的なものは，次の対応表である。つまり，ABCD の形を調べ，その様子を観察し，スケッチし，EFGH の形について言語化してまとめたものである。下記は，生徒がまとめるときによくあるケースの一つである。

ABCD	EFGH	スケッチ
正方形	一点	
長方形	正方形	
ひし形	一点	
平行四辺形	長方形	
台形	四角形	
四角形	四角形	

この対応表を基に,様々な探究の可能性がある。

A. 台形の場合も四角形の場合も「四角形」だが，それは妥当か。(平行四辺形の場合との共通点・相違点を探すことで，台形の場合は一組の対角が 90 度，四角形の場合は対角の和が 180 度つまり円に内接する四角形であることがわかる)

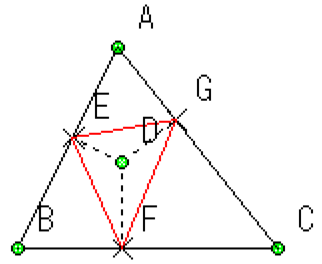
B. EFGH の形の種類がかなり少ない。ひし形,平行四辺形,台形がない。(台形・四角形の場合にそれらがあるかどうかを探すと台形は等脚台形が見つかる。共通する性質として円に内接する四角形であることがわかることで，この疑問は解消される。)

C. EFGH が一点になる場合が多い。(一点になるような図を数多く調べることで,ABCD が円に外接する四角形の場合に EFGH は一点になることがわかる)

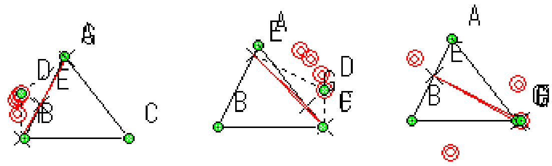
このような対応表の結果の考察から探究の多様性が生まれる事例は多い。また，対応表は四角形の形状に関する分類から出発するが，それを深めていくことによって，図形の性質に注目するように深化できたり，注目すべき特殊な場合を発見できることが多い。

②条件を満たす点のプロットの多様性

問題:三角形 ABC と動点 D がある。D から AB,BC,CA にそれぞれ下ろした垂線の足を E,F,G とするとき，△EFG = 0 とするには，点 D をどこにとったらよいか。



点 D を動かして△EFG=0 となる点をプロットすると，授業の中での限られた時間での作業では，次のように，いろいろな場合が生まれる。

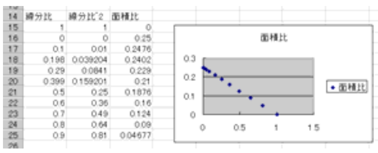


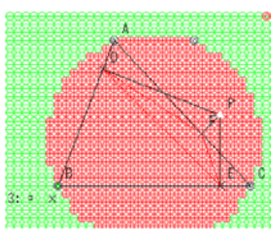
互いの様子をのぞきこみながら，どういう方法がいいのか，重ねるとどうなるのかなどを検討することができる。

このように，ある条件に対して，それを満たす点の集合をプロットする場合，どこに点をとるのか，暫定的な結果を踏まえて，次にどこを調べるべきか，それらを観察するとどういう集合になると考えられるのかなど，重要な役割を果たすことがわかった。

③使う機能などによる探究の深さの変化

また，この事例の場合，△EFG=0 となる D の集合は△ABC の外接円になることが観察からわかるが，作図ツールの他の機能を使いこなしたり，Excel と連動することによって，△EFG の値が極大になる場所として外心が，また△EFG の値が一定になる D の集合はすべて外心を中心とする円となることなどを観察できたり，面積と外心と D の距離の関係などを推測することができた。つまり，使う機能の多さによって，探究の深さが変化する事例としても位置づけることができた。

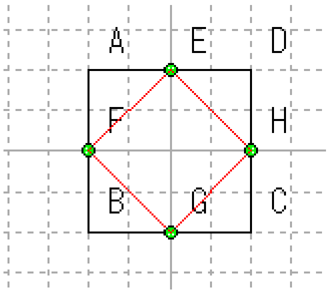




同様の事例は，整数の性質に関する探究に関しても，いくつもあった。フィボナッチ数の一位の値に関してExcelを使った探究や，$3^2+4^2=5^2$に類似した事例をJavaScriptで開発したツールで調べる探究事例が該当する。一定のパターンの事例の発見に基づいてそのパターンならばいつでも成立することの証明は，紙と鉛筆でも行える範囲といえるのだが，「そのパターンしかないのではないか」という予想に対して，そのパターン以外の事例の発見を行うことにより，予想は否定されたのだが，そのような反例の発見にテクノロジーが大きく貢献可能であることが分かった。

(3) 研究代表者が過去に行った実践の中で，授業設計時において，その素材に関連する数学的探究の様相を踏まえて複数の選択肢を明確にし，指導案として文章化していた授業に関して，実際の授業記録に則しながら，授業の主な場面における授業者の意志決定の様子を明確にした。

問題:次のような図において，4つの辺の格子点を一つずつ選んで結び，四角形 EFGH をつくる。4 つの点をいろいろな位置に変えるとき，EFGHの面積についてどんなことがわかるか。



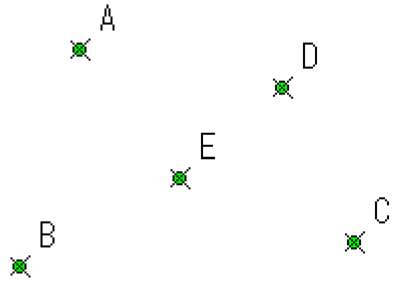
同様の手法で，2009年に高校で実施した研究授業に際して，事前に素材に関する数学的探究の多様性の様子を明確にし，そこから明確になる選択肢を意識しながら，授業の中での意志決定の様子がどうであったかを，明らかにした。

(4) (1)～(3)を踏まえて，数学的探究の多様性の明確化と授業における複数の選択肢の明確化等を踏まえた教材開発・授業設計の指針を考察し，それを反映した学部の授業(数学科教育 CII)や，大学院の授業(数学科授業研究 II)のシラバスおよび(学内向け)web コンテンツを作成した。

(5) (4)の検証の一つとして，附属名古屋中学校での授業実践を念頭においた教材開発・授業設計・授業実施・検討会を毎年行った。それぞれのプロセスにおいて，附属学校教員との共同研究はもちろん，学外の共同研究者や学部・大学院の授業との連携を行ったり，他の学校での授業の実施や，様々な現職研修の場での模擬授業・協議等も行いながら進めていった。以下にその授業の概要を

①伊藤実践(2009/2/5)

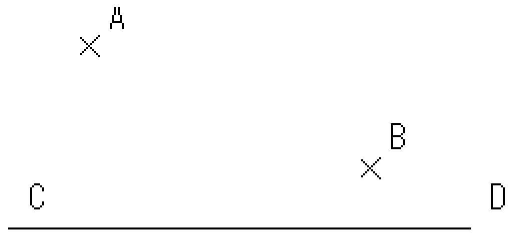
問題 : 次の図のように 4 軒の家がある。共同井戸を堀り，そこからそれぞれの家に水道を引くことにした。井戸をどこに堀るのがよいだろうか。



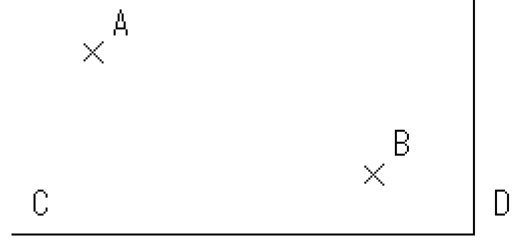
「点Eが満たすべき条件」を求めると，最初に「すべての点から等しい距離にある場所」という答えが生徒から出る。それを求めて調べてみると，そのような場所は見つからない。「どうしたらいいのか。」問題状況をよく検討してみると，井戸から水道を引くのだから，距離が等しいことは不可欠な条件ではないことが分かり，4 つの線分の和に注目することになる。結果として，AC と BD の交点の位置が候補として見いだされていく。このプロセスの中で，数学的モデル化過程を強く意識した事例である。

②後藤実践(2010/1/25)

問題 (1) AくんがBさんのところに行くにあたって,花を摘んでからいくことにした。どこで花をつむといいか。

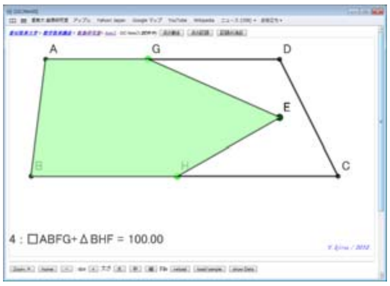


(2) AくんはBさんのところに行くにあたって，花とリンゴを摘んでからいくことにした。どこで花をつみ，リンゴをつむといいか。

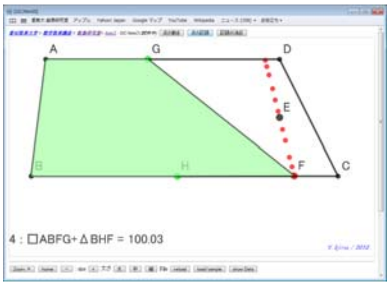


(1)での線対称移動(および三角不等式)の考えを踏まえて，(2)への発展を考える問題だが，特にグループの中での様子を見ると，当初予想した以上にそれぞれのグループ固

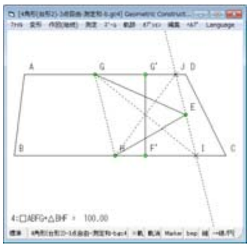
有の問題を生み出していた。プレゼン的な授業での意志決定の様子を設計するのとはかなり違った様相が，グループ活動の学びにはあるということを実感した。
③鈴木実践(2011/1/27)
問題: 台形の畑を，村長と鈴木くんが下の図のような境界線で使っています。今の境界線では使いにくいので，二人の土地の面積を変えないように，境界線の引き直したいと思います。一点 E のみを動かすとしたら，どこに動かしたらいいでしょう。



テクノロジー(GC/html5)を使うことによって，次のような場所ならばよいことが分かる。その中では，(2 ケ所が妥当ということが分かる。



しかし，上記の案は本当に満足できる案だろうかと吟味してみて，面積は同じでも使いにくいのではないか等の指摘から，たとえば，次のような案を考え直したり，2 つの直線の交点を通る線ならどれでもよいことを見いだしていく過程を教材化したものである。



(6) (4)に基づいて行った学部の授業(数学科教育CII,計9回)や大学院の授業(数学科授業研究,計3回)においては，一般的な教授・学習の他，(5)の教材開発,授業設計，授業分析等に直接触れ，実践的な学びを行えたと同時に，附属教員にとっても実践に向けて有益な情報を提供することができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計６件)
①飯島康之、「壁にタッチする最短問題」とその周辺 - 附属名古屋中学校での後藤実践に関連して -、イプシロン、査読無、vol.52、23-33、2010
②飯島康之、consecutive sum の問題に関する数学的探究の多様性について - 意志決定との関わりからの考察-、日本科学教育学会研究会研究報告、査読無、vol.24 、No.6、2010、21-26
③藤岡祐紀、飯島康之、作図ツールを利用したグループ活動に関する教師の意図と生徒の活動の実際、日本科学教育学会研究会研究報告、査読無、vol.24、No.6、2010、15-20
④飯島康之、普通教室での１時間の授業でグループ 1 台の GC を使う授業の設計と実践 - 附属名古屋中学校での伊藤実践 ：－「共同井戸を掘るべき場所を探せ」 －、イプシロン、査読無、vol.51、2009、5-16
http://hdl.handle.net/10424/3052
⑤飯島康之、作図ツール Geometric Constructor を使った探究事例と教育実践について、数理解析研究所講究録、数式処理と教育、査読無、vol.1674、2010、99-111
⑥飯島康之、研究授業から DS の新しい使い方、イプシロン、査読無、vol.50、2008、5-16
http://hdl.handle.net/10424/1386
〔学会発表〕(計４件)
①飯島康之、授業研究を通してのテクノロジー活用の役割の将来、日本科学教育学会年会、広島大学、2010/9/11
②飯島康之、GC を中心としたこれまでの作図ツールの問題点と今後の課題、RIMS 研究集会「数式処理と教育」、京都大学、2010/8/30
③飯島康之、作図ツールを用いた数学的探究における意志決定と「対応表」の役割、日本科学教育学会年会、同志社女子大学、2009/8/26
④飯島康之、作図ツール Geometric Constuctor を使った探究事例と教育実践について、RIMS 研究集会「数式処理と教育」、京都大学、2009/8/26

〔その他〕
ホームページ等
http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/iijima.htm
http://iijima.auemath.aichi-edu.ac.jp/gcwiki/

６．研究組織
(1)研究代表者
飯島　康之（IIJIMA YASUYUKI）
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号：30202815