様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２３年　３月　３１日現在

機関番号：１０１０２
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008　～ 2010
課題番号：２０５４０００１
研究課題名（和文）　有限群の fusion system とコホモロジーの研究

研究課題名（英文）　Studies on fusion systems and cohomology of finite groups

研究代表者
奥山　哲郎　（OKUYAMA TETSURO）
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：６０１２８７３３

研究成果の概要（和文）：有限群の表現論における中心的課題のひとつであるブルエ予想の解決にむけ、フュージョン・システムとそのコホモロジーの理論をとおして考察した。ｐ－置換加群とブラウアー写像の理論の整備に取り組み、結果として、ブルエ予想を支える導来同値なブロックの例をいくつか確認できた。また、関連して、対称群の２－ブロックのモジュラー既約指標の高さについての興味深い結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In the research of this project, we studied the conjecture of Broue which is one of main problems in representation theory of finite groups. Theory of fusion systems and cohomology of finite groups is our main tool for investigations. We obtained some results concerning p-permutaion modules and their Brauer construction. And we had some derived equivalent blocks which gives an evidence for the conjecture.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：有限群の表現論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：群の表現論、群のコホモロジー、ブロックの導来同値

１．研究開始当初の背景
(1)局所的構造から全体構造を明らかにすることは、有限群の研究における中心的研究方法であり、かつ研究課題でもある。有限群の表現論、特に、正標数ｐの体上のモジュラー表現論の研究においては、ｐ－局所的構造（ｐ－部分群とその正規化群、中心化群）を表現論的対象の考察にどう結びつけるかが問題となる。

(2)有限代数群の表現論の研究に特徴的に現れるように、群とそのある種の自己同型群による不変部分群とが共有する表現論的性質の考察はきわめて興味深い。そこでの現象の深い考察のもと提起されたブルエ予想は、可換不足群予想とも呼ばれ、有限群の表現論における中心的課題のひとつである。可換不足群をもつブロックはそのブラウアー対応ブ

ロックに導来同値となると主張するものである。

(3)J.Richard, R.Rouquier など多くの研究者による研究がなされ、興味深い研究課題も派生してきた。ブルエ予想の解決の道はまだ見えていないが、主ブロック間で種々開発された理論を一般のブロック間へも整備する研究、また、不足群が可換でない場合での興味深い研究がすすんでいる。

(4)ブロックの不足群はブロックの性質を強く規制するｐ－部分群である。上述の研究においては、不足群上のフュージョン・システムの言葉で述べられる理論が重要な役割を果たしている。同じフュージョン・システムをもつブロックは多くの表現論的、コホモロジー的性質を共有していることが、明らかにされている。

２．研究の目的
有限群のブロック間の導来同値を与える傾斜複体、特に、両側傾斜複体の構成には、自明な台をもつ直既約加群、ｐ－置換加群の考察が必要になる。それらの振る舞いがブロック上の加群の圏の構造の何を規制するのかを明らかにすること、また、それらを項にもつ複体で、ある種のホモロジー加群をもつものを構成する方法を確立することが必要となる。本研究課題においては、フュージョン・システムの理論の応用が期待できる具体的設定で、傾斜複体の構成を図るとともに、一般的な理論への整備を探ることを目標とする。主に考察する設定は次のとおりである。

(1)グラウバウマン対応、川中の指標持ち上げの理論と関連して：これらの設定は、有限群Ｇとそのある種の自己同型群を与え、その不変部分群ＨとＧの既約指標の対応を与える理論である。ｐと素な位数の自己同型群を与えるとき、多くの例において、ＨとＧは同じフュージョン・システムを持つことが起きる。加群論的な対応の理論を探りたい。特に、非自明なｐ－局所部分群のすべてで主ブロックの指標が正の符号で対応しているとき、森田同値性との関連を解明したい。

(2)有限群のｐ－群による拡大、及び、中心的ｐ－群の拡大について：群Ｇとその中心的ｐ－部分群Ｚによる剰余群Ｇ/Ｚの主ブロックの表現論的性質の関連を探る。Ｇ、あるいはＧ/Ｚのシローｐ－部分群が可換である場合に取り組む。また、群Ｇの自己同型群でｐ－群であるものＰを与え、ＧとＰの半直積の群Ｇ‘の表現論的関連を探る。Ｇのシローｐ－部分群が可換であるとき、ＧとＧ’のフュージョン・システムが同じとなることが多い。

(3)ブロックのコホモロジーの理論、ｐ－群のコホモロジーと関連して：ブロックの導来同値性を与える傾斜複体の構成の理論の整備、発展にとって、ｐ－群のコホモロジー環における安定元の統制は重要な働きをすることが期待される。可換ｐ－群上のフュージョン・システム、そのコホモロジーはよく理解されているが、非可換な場合には、階数が低い場合においてさえもそのしくみが解明されていない。群多元環の生成元と関係式の記述等にも取り組みたい。

(4)有限代数群における双対対応、対称群のコホモロジー、表現論について：自明な台をもつ直既約加群、ｐ－置換加群からなる複体は群のコホモロジー元の生産と密接な関連をもつ。有限代数群における加群の導来圏における自己同値を与えるCabanes-Rickardの両側複体はそのホモトピー圏の自己同値を与えることが知られている。この複体、及び、その背景にある付随するワイル群の加群の圏の自己同値を与える両側複体は多くの応用が期待される。ある種の有限代数群の主ブロック間の傾斜複体の構成、対称群のコホモロジー元構成、その応用を図る。

３．研究の方法
本研究課題は、有限群の表現論の話題である有限群のフュージョン・システムとコホモロジーを研究対象とするものであるが、代数群の表現論、幾何学的コホモロジー論、次数付可換環としての、群のコホモロジー環論も重要な研究手法となる。そのため、リー環、リー群、微分幾何学、可換環を専門とする研究者も研究分担者として参画する。研究の方法は以下に述べるとおりである。

(1)簡約型代数群とそのフロベニウス写像に一定の条件をおくと、有限代数群として現れる不変部分群Ｇ、Ｈが同じフュージョン・システムをもつことが生じ、川中の指標の持ち上げのブロック版が考えられる。予想される導来同値性、傾斜複体はブラウアー写像と整合性をもつと考えられる。関連するグラウバウマン型設定でも同様である。Rouquier の貼りあわせの理論や、その整備を探りながら考察していく。階数の小さい群で導来同値なブロックの例を生産する。また、ｑ元体上の有限代数群で、素数ｐがｑ－１を割る場合について、考察し、Puig 型の定理を探る。

(2)群Ｇが中心的部分群Ｚをもち、ある種の仮定のもと、Ｇとその剰余群Ｇ/Ｚの主ブロックの表現論的関係と、そのブラウアー対応ブロックの関係を調べるため、Ｚに関する相対射影被覆の応用が有効となる。

また、群Ｇのｐ－群である自己同型群Ｐとの半直積Ｇ‘の表現論的性質を調べるためには、Ｐに関するブラウアー写像と、Ｐに関する相対射影被覆の整合性を保障し、利用しやすい理論の整備が必要となる。

(3)群Ｇとブロックのコホモロジー理論の整備には、適切な部分群Ｈとある種の性質を両側加群を構成することが必要となる。部分群の属に関する相対射影被覆の理論、その拡張である加群の属に関しての、相対射影被覆の理論を応用する。
相対射影被覆の理論は、性質のよいコホモロジー元を構成するのにも有用である。非可換な場合、自己同型群の作用もこめてコホモロジー環の構造を知ることは、本研究課題の考察にも有効である。

(4)有限代数群における加群の圏における自己同値を与えるCabanes-Rickardの両側複体応用にあたって、種々の加群の相対射影被覆の列の構成、適当に「切り詰め」を行うことで得られる両側複体の構成が期待できる。また、Ａ型のワイル群としての対称群の表現論の考察、そのコホモロジー環の有用な元の構成にも利用したい。

４．研究成果
(1)素数ｐがｑ－１を割る場合のｐ次の一般線型群GL(p,q)の主ｐ－ブロックはすべて森田同値となることを証明した。その方法は、相対射影被覆の理論から単純加群のグリーン対応子を具体的に決定することで、一般射影線形群PGL(p,q)の主ブロック間の森田同値性を証明すること、また、中心拡大の情報をもとの群へ反映する考察を行うことである。功刀直子氏、宮地兵衛氏との共同研究による。これらと、一般射影ユニタリー群U(p,q)の主ブロックとの導来同値性については今後の課題として残るが、ｐ＝３の場合は概ね解決に至った。また、GL(p,q)の主ブロックの単純加群のうちひとつは興味深い周期的加群であること、その代数多様体の構造も記述できた。

(2)M(3)をシロー3－部分群にもつ群の主3－ブロックの考察を行うため、標数３の体上のM(3)の群多元環の生成元、関係式をその自己同型群の作用をこめて決定した。その応用として､12次のマシュー群とSL(3,3)の主３－ブロックの導来同値性を与える傾斜複体の構成にめどがついた。これまでに知られていた単純加群のグリーン対応子の構造の情報を用い、Rickardの傾斜複体構成の理論がうまく機能することで証明される。
M(3)を３－シロー部分群にもつ興味深い群であるF型のReeの群についても取り組んだが、十分な解明に至らなかった。

(3)ｐ－置換加群の属をブラウアー写像をとおしてｐ－局所群の射影加群の属として考察する際の理論の一定の整備を行った。極小相対射影被覆が極小射影分解に対応する内容で、次の設定での応用を図った。
①可換シローｐ－部分群をもつ群Ｇとその自己同型群Ｐで位数ｐであるものを与え、半直積Ｇ‘を考えられる。この群におけるＰの正規化群は中心化群に一致し、Ｐ×Ｃの形で書ける。群Ｃにおいて、ブルエ予想が成立ち、付随する安定型同値の形が一定の条件をもつとき、Ｇ’において安定型同値が得られることを示した。これをどのように導来同値につなげるかの一般論は難しいが、Ｇのシローｐ－部分群が巡回群である場合の例を考察し、PSL(2,q^p), U(3,q^p)のガロア群の誘導する自己同型による半直積で主ブロックの導来同値を確かめた。Holloway-越谷-功刀の結果の一定の改良となっている。
②この考察のために、ｐ－群M_n(p)の群多元環の生成元、関係式を記述した。また、自明な加群の射影被覆を具体的に構成した。傾斜複体構成のために必要な、適当なホモロジー加群が出現する複体の構成に利用した。
③上記①の考察において、自己準同型－自明加群が現れ、M_n(p)のそれが分類されていることが、議論がうまくいった理由のひとつである。鈴木群、Ｇ型のRee群においても同様の状況が起きていると予想でき、今後の課題としたい。

(4)シローｐ－部分群Ｐを共有し､同じｐ－局所構造をもつ２つの群Ｇ、Ｈの主ブロックの導来同値性を考察する際、Ｇ×ＨにおけるＰの対角部分群を台にもつスコット加群の振る舞いを統制することが必要となる。スコット加群のブラウアー写像による像の直既約性について、Kesar-功刀-三橋の考察があるが、このブラウアー直既約性をもつためのある十分条件を与えた。

(5)Cabanes-Richard の複体、Ａ型のワイル群の場合の複体を利用して、標数２の体上の対称群のコホモロジー環の生成元の重要なものを具体的に構成した。自明な加群の拡大列として与えることで、付随する Carlson 加群がみやすくなり、加群の代数多様体の計算への応用が期待できる。いわゆる Spin 加群とよばれる加群の代数多様体の決定に取り組み最終段階にあると考えるが最終決着には至らなかった。宇野勝博氏と共同で研究をすすめてきた。

(6)ブロックの Cartan 行列について、導来同値でどのような性質が保存されるかも、興味深い研究対象である。また、通常既約指標の

高さは、保存される場合が多いが、モジュラー既約では期待できない。
①対称群のブロックはweightとcoreで特徴付けられ、同じ weight、core をもつブロックは導来同値となること、したがって、どのブロックも（ある次数の対称群の）主ブロックと導来同値となっていることが知られている。一方、標数２の体上では、Fongらの結果により、高さ０のモジュラー既約指標は自明なものが唯一である。これを拡張した定理を証明した。つまり、対称群の２－ブロックは唯ひとつの高さ０のモジュラー既約指標をもつ。また、その source 加群は自明である。清田正夫氏、和田倶幸氏との共同研究による。
②Cartan 行列のフロベニウス根の整数性について、和田－清田の問題に取り組み、部分的解決を与えた。和田倶幸氏との共同研究として得られたものである。

(7)研究遂行中のコホモロジー環の考察のなかで、有限群のコホモロジー環の素イデアルが素因子であるための群論的な十分条件について、D.Green の結果の一定の拡張結果が得られた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① <u>奥山哲郎</u>、和田倶幸、Eigenvalues of Cartan matrices of blocks in finite groups、Contemporary Mathematics, 査読有、524巻、2010, 20-23
② <u>奥山哲郎</u>、A remark on associated primes in the cohomology algebra of a finite group, RIMS KOKYUROKU, 査読無、1679巻、2010、113-117
③ <u>奥山哲郎</u>、Some properties of spin modules of the symmetric groups, RIMS KOKYUROKU, 査読無、1709巻、2010、38-50

〔学会発表〕（計５件）

① <u>奥山哲郎</u>、和田倶幸、Cartan eigenvalues of blocks of finite groups, 日本数学会2010年度秋季総合分科会、平成22年9月22日、名古屋大学大学院
② <u>奥山哲郎</u>、有限群のコホモロジー環の素因子について、有限群とコホモロジー論とその周辺研究集会、平成21年9月4日、信州大学・全学教育機構
③ <u>佐々木洋城</u>、Stable elements in cohomology algebras、有限群とコホモロジー論のその周辺研究集会、平成21年8月31日、信州大学・全学教育機構
④ <u>奥山哲郎</u>、Some properties of spin module of the symmetric groups, 有限群と代数の表現論とその周辺研究集会、平成20年11月21日、京都大学数理解析研究所

６．研究組織

(1)研究代表者
奥山　哲郎（OKUYAMA TETSURO）
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：６０１２８７３３

(2)研究分担者
長谷川　和泉（HASEGAWA IZUMI）
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：５０００２４７３

北山　雅士（KITAYAMA MASASHI）
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：８０１６９８８８

八ツ井　智章（YATSUI TOMOAKI）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：００２６１３７１

居相　真一郎（IAI SHIN-ICHIRO）
北海道教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：５０３３３１２５

(3)連携研究者
佐々木　洋城（SASAKI HIROKI）
信州大学・全学教育機構・教授
研究者番号：６０１４２６８４