

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540004

研究課題名(和文) 楕円曲線の虚数乗法とアーベル多様体

研究課題名(英文) Complex multiplication of elliptic curves and abelian varieties

研究代表者

中村 哲男 (NAKAMURA TETSUO)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：90016147

研究成果の概要(和文)：

有理数体上で定義されたアーベル多様体のトーション群を決定することは整数論の見地からも重要な問題である。1次元の場合はすでに解決されている。本研究では2次元の非単純、CM型のアーベル多様体に対してトーション元の位数を決定した。

楕円曲線の有理点を用いて、類数がある整数の倍数になる代数体を無数構成することが出来た。ある特殊なクラスの楕円曲線について、その整数点とモデルル・ヴェイユ群の生成系を具体的に与えた。

研究成果の概要(英文)：

To determine the structure of torsion groups of abelian varieties defined over the rationals is an important problem in number theory. The case of dimension one is already settled. In our research we investigated the case of dimension two, non simple and of CM type. We determined the orders of torsion elements of such abelian surfaces.

Using rational points of elliptic curves we constructed an infinite number of number fields whose class numbers are divisible by a certain integer.

For a special class of elliptic curves, we gave concretely integer points and generators of Mordell-Weil groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：楕円曲線、虚数乗法、アーベル多様体、トーション、類数、整数点、モデル・ヴェイユ群、代数体

1. 研究開始当初の背景

アーベル多様体のトーションについては、当該研究者の平成16～18年度科研費補助金研究「楕円曲線の数論的研究」で得られた成果を基にしている。

本研究に関係した代数体の類数については、当該研究者を含めた何名かの研究者によりいくつかの成果が得られていた。

2. 研究の目的

(1) 有理数体上のアーベル曲面のトーション群を完全に決定すること。

(2) 楕円曲線と代数体の類数がどういう関係にあるのか。これまでに知られていない点を含めて明らかにする。

3. 研究の方法

本研究に関係する理論、過去の結果を輪読を通じて比較、整理する。これまでの成果を踏まえて、多くの研究者と研究集会等で交流し、情報収集して研究に生かす。MAGMA, PARI等の数論ソフトを利用。

4. 研究成果

(1) 有理数体上のアーベル曲面のトーション

A を有理数体 \mathbf{Q} 上で定義されたアーベル多様体で (\mathbf{C} 上) CM type とする。

$A(\mathbf{Q})$ の torsion について, Silverberg (1988, *Comp. Math.*), Mulbregt (1992, *Cont. Math.*) は field of moduli を用いて群構造の評価を与えている。

A が \mathbf{C} 上単純のとき, Aoki (1994, in *Algebraic cycles and related topics* (Edited by F. Hazama, World Scientific)) はさらに詳しい評価を与えている。

特に A が 2次元のとき, まとめると次のようになる。

		End $A \otimes \mathbf{Q}$	P	N
I	A :simple		5	10
II	$A \sim E \times E$	$M_2(\mathbf{Q}(\sqrt{-D}))$	5	12
		$M_2(\mathbf{Q}(\sqrt{-1}))$	7	30
		$M_2(\mathbf{Q}(\sqrt{-3}))$	13	42
III	$A \sim E \times E$	$\mathbf{Q}(\sqrt{-D}) \times \mathbf{Q}(\sqrt{-D'})$	31	2040
		$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) \times \mathbf{Q}(\sqrt{-D'})$	61	9240
		$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}) \times \mathbf{Q}(\sqrt{-D'})$	97	14280
		$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) \times \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$	193	28560

ここで, P は $A(\mathbf{Q})_{\text{tors}}$ の元の位数が素数であるものの上限, N は $A(\mathbf{Q})_{\text{tors}}$ の元の位数の上限を表す. 我々は有理数体 \mathbf{Q} 上の単純でない CM アーベル曲面についてより具体的に調べ, 以下のような結果を得た.

定理 \mathbf{Q} 上のアーベル曲面 A は CM 楕円曲線 E_1, E_2 の直積 $E_1 \times E_2$ と \mathbf{C} 上 isogenous であるとする.

(a) A が \mathbf{Q} 上単純でないとき, $A(\mathbf{Q})$ の元

で位数が素数 $p(>3)$ のものはない。

(b) A が \mathbf{Q} 上単純のとき、 E_1 と E_2 は isogenous であり、 E_1 は K を虚数乗法にもつとする。このとき $A(\mathbf{Q})$ の元で位数が素数 $p(>7)$ のものはない。

(i) $A(\mathbf{Q})$ が位数 5 の元を含むのは

$$K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}), \mathbf{Q}(\sqrt{-5}), \mathbf{Q}(\sqrt{-10})$$

のときだけである。

(ii) $A(\mathbf{Q})$ が位数 7 の元を含むのは

$$K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}), \mathbf{Q}(\sqrt{-7})$$

のときだけである。

CM abelian surface A は虚数乗法をもつ楕円曲線 E の直積 $E \times E$ に同種であるとき、特異アーベル曲面と呼ばれる。定理 (b) は \mathbf{Q} 上定義された特異アーベル曲面は楕円曲線 E からどのように構成されるかということのみを明らかにして得られた。(i), (ii) の場合の具体例も作れる。

(2) 楕円曲線から得られる代数体の類数

素数位数の有理点をもつ楕円曲線から作られる多項式によって、2次体でその類数が 3, 5, 7 で割り切れるようなものが無数に構成できることを示した。また、与えられた奇数次数に対し、代数体で類数が 3, 5, 7 で割り切れるようなものが構成できることを示した。

(3) Brumer の 5 次多項式が生成する代数体の分類

Brumer の 5 次多項式によって有理数体上 2 面体群をガロア群にもつ 10 次代数体が構成される。

この多項式は 2 つのパラメータをもつが、この代数体の分類を楕円曲線の有理点を用いて行った。

(4) 楕円曲線 $y^2=x^3-p^kx$ の整数点と Mordell-Weil ランク

素数 p に対し、楕円曲線 $y^2=x^3-p^kx$ の整数点と Mordell-Weil ランクの関係調べた。素数 p のタイプを用いて、Mordell-Weil 群の具体的な生成系を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Y. Fujita and N. Terai, Integer points and independent points on the elliptic curve $y^2=x^3-p^kx$, Tokyo J. Math. (accepted), 査読有,

② T. Nakamura, Torsion points on some abelian surfaces of CM-type, J. Number Theory, 査読有, Vol 130 (2010), 1061--1067.

③ A. Sato, Construction of number fields of odd degree with class numbers divisible by three, five or by seven, Interdisciplinary Information Sciences, 査読有, Vol 16 (2010), 39--44.

④ M. Kida, Y. Rikuna and A. Sato, Classifying Brumer's quintic polynomials by weak Mordell-Weil groups, International J. Number Theory, 査読有, Vol 6 (2010), 691--703.

⑤ A. Sato, On the class numbers of certain number fields obtained from points on elliptic curves II, Osaka J. Math., 査読有, Vol 45 (2008), 375--390.

[学会発表] (計 3 件)

① 寺井伸浩、楕円曲線 $y^2=x^3-p^kx$ の整数点と Mordell-Weil ランクについて、2009 年 10 月 16 日 早稲田大学整数論セミナー、早稲田大学大久保キャンパス

② 佐藤篤、類数が 3, 5 または 7 で割り切れる奇数次代数体について、2008 年 11 月 13 日 日韓整数論セミナー 2008、東北大学片平キャンパス さくらホール

③ 中村哲男、有理数体上の特異アーベル曲面のトーションについて、2008 年 6 月 6 日、早稲田大学整数論セミナー、早稲田大学大久保キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 哲男 (NAKAMURA TETSUO)

早稲田大学・理工学術院理工学研究所

・客員研究員、東北大学・名誉教授

研究者番号：90016147

(2) 研究分担者

佐藤 篤 (SATO ATSUSI)

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：30241516

(H21,22 年連携研究者)

(3) 連携研究者

寺井 伸浩 (TERAI NOBUHIRO)
足利工業大学・準教授
研究者番号 : 00236978