様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月１９日現在

機関番号：１１３０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2012
課題番号：２０５４０００５
研究課題名（和文）保型形式論からみた離散系列表現の球関数の研究
研究課題名（英文）Study on the spherical function of discrete series representations from the point of view of the theory of automorphic forms
研究代表者
高瀬　幸一　（TAKASE KOICHI）
宮城教育大学・教育学部・教授
研究者番号：60197093

研究成果の概要（和文）：実半単純 Lie 群の離散系列表現の最小の K-タイプに付随する球関数の明示的公式の研究，及びそれの Fourier 変換の非零集合と放物型概均質ベクトル空間の関係の研究，更に p-進簡約可能 Lie 群の supercuspidal 表現についても同様の研究を行った．簡約可能な実 Lie 群を具体的に扱うための道具として Jordan 三重系を用いた．

研究成果の概要（英文）：Studies on an explicit expression of the spherical function associated with the minimal K-type of a discrete series representation of a semi-simple real Lie group and the non-zero set of its Fourier transform in terms of the prehomogeneous vector space of parabolic type, and on the parallel problems for supercuspidal representations of reductive p-adic Lie groups. The theory of the Jordan triple system is used as a tool to study reductive real Lie group explicitly,

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	800, 000	240, 000	1040, 000
2009 年度	700, 000	210, 000	910, 000
2010 年度	700, 000	210, 000	910, 000
2011 年度	700, 000	210, 000	910, 000
2012 年度	500, 000	150, 000	650, 000
総　計	3, 400, 000	1, 020, 000	4, 420, 000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：群の表現論，保型形式，球関数，Jordan 三重系，Fourier 変換

１．研究開始当初の背景

有理数体上定義された半単純代数群の実有理点のなす半単純実 Lie 群 G の極大コンパクト部分群を K として，G は離散系列表現 π をもつと仮定すると，π の最小の K-タイプ δ は重複度 1 で含まれるから，π の表現空間の δ-等型成分上の π(g)の跡を π の δ に関する球関数と呼ぶ．G をその数論的部分群 Γ べ割った空間上の二乗可積分関数の空間上の正則表現における π の重複度は有限で，π に付随する Γ に対する保型形式の空間に対応する．従ってその重複度は保型形式の空間の次元を与えるから，重要な研究対象である．上記の球関数を用いると，π が可積分表現ならばその重複度（即ち保型形式の次元）を明示的に表す公式を球関数の無限級数の積分として書く事ができる．その積分を Selberg-Tamagawa 流に Γ の共役類上の軌道積分の和として書く事は，一般には Γ の共役類の分類が困難なので，特別に計算しやすい場合のみ実行されているが，T.Shintani (J.Fac.Sci.Univ.Tokyo,22(1975),25—65) は Siegel 尖点形式に関して，球関数の無限級数の無限部分和に限れば，その積分は概均質ベ

クトル空間(GL(n),Sym(n))$のゼータ関数の特殊値として書けることを示した．この場合にはπは実斜交群の正則離散系列表現である．議論の大切な点は，付随する球関数をSiegel上半空間の境界成分に付随する放物的部分群の冪単部分の中心の Lie 環上で Fourier 変換すると，生ずる関数は無限遠での減少度が改善されて無限和と積分の交換が可能となること，及び Fourier 変換の非零集合（関数の値が 0 とならない部分）が問題の概均質ベクトル空間の開軌道の実部分の連結成分となる自己共役等質開凸錐体となることである．一般に G を K で割った空間が複素構造を持つとき（Hermite 型の場合）には G 上の正則離散系列表現が構成されて，その球関数は具体的に書く事ができる．また，対応する複素有界対称領域及びその境界成分の様子は Wolf-Koranyi の一般論からよく知られている．一方，G を K で割った空間が複素構造を持たなくても，G の階数と K の階数が一致すれば G は離散系列をもち，それが可積分となる条件も知られている．しかしながら，そのような場合に，球関数の明示的な公式は Frensted-Jensen による積分表示を除けば知られていなくて，Frensted-Jensen の公式も我々の目的には十分に明示的とは言えない．一方 G を K で割った空間の構造に関しては，Hermite 型の場合の Wolf-Koranyi の理論を内包する形でコンパクト Jordan 三重系を用いて議論することが出来る（コンパクト Jordan 三重系が特に Hrmite 型のときが Wolf-Koranyi の理論となる）．対応する対称空間（実有界対称領域とでも呼ぶべきもの）の境界成分，及びそれに付随する放物的部分群とその冪単部分の構造は Jordan 三重系を用いて非常に具体的に書く事ができる．ところで概均質ベクトル空間の一般論として，放物的部分群に付随して生ずる概均質ベクトル空間（放物型概均質ベクトル空間）の性質は Rubenthaler による理論がある．そこで正則離散系列表現と平行な議論を非正則な離散系列表現について出来るかもしれないという希望が生ずる．ところで線形代数群の表現論ではしばしば起きることであるが，実 Lie 群の表現論と p-進 Lie 群の表現論の間に著しい並行関係が存在するのである（Harish-Chandra はこのような現象を Lefschetz 原理と呼んでいる;Lecture Notes in Math.162,p.1）．そこで p-進線形群の場合に上記の問題と並行した問題を考えることは表現論の立場からは興味深いだろう．この場合に離散系列表現としては最も基本的な supercuspidal 表現をとるのが良いだろう．最近の研究で一部の線形群についてはその supercuspidal 表現が詳しく判ってきたので，その結果が利用できるであろう．以上が本研究を開始する段階での一般的状況である．

２．研究の目的
第一の研究目的は，正則離散系列表現のきゅ関数について，その Fourier 変換の様子を詳しく調べることである．Siegel 尖点形式に関する T.Shintani による計算の場合には Fourier 変換の様子を決定するのは所謂 Siegel の積分公式である．従って，我々の研究目的の中にはそのような積分公式を一般の複素有界対称領域の倍位に一般化するという問題も含まれる. その際に Hermite 型コンパクト Jordan 三重系の言葉を記述するための言葉として活用したい.

第二の研究目的は非正則な離散系列の球関数の Fourier 変換の非零集合の明示的な表示を得ることである. T.Oda のグループが長年努力しているように，一般に非正則な離散系列の行列成分はかなり複雑なものと思われる．従って付随する球関数自体の明示的な公式を得ることはかなり困難であると思われる．しかし Shintani 流の計算を問題にする場合には，球関数自体ではなくてそれを比較的小さな空間に制限したものの Fourier 変換が問題となるのであるから，その場合には詳しい事が分かっても不思議ではないだろう．それを探求するのが第二の研究目的である．そのためには，非正則な離散系列表現の具体的な構成法をしらべて, 最小の K-タイプの空間を具体的に決定する必要があるかもしれない. 或いは Frensted-Jensen の積分公式を詳しく分析する必要があるかもしれない．一方で，R.Takahshi と T.Arakawa が求めた Sp(1,n) の離散系列の球関数は異常に単純な形をしていて注目に値する．このような現象を一般的な文脈で理解することも第二の研究目的に含まれる.

第三の研究目的は，p-進線形群の supercuspidal 表現について，その球関数の明示的公式を研究し，適当な空間での Fourier 変換を考え，特にその非零集合を決定することである．一般に supercuspidal 表現は適当な開コンパクト部分群の既約ユニタリ表現からの誘導表現として実現され，その開コンパクト群に制限したとき当初の既約ユニタリ表現を重複度 1 で含むから，それらに関する球関数を調べるのである．ところでその様な開コンパクト群の既約表現は素元の冪を法とした還元を通して有限線形群の既約表現から生ずる．従って研究目的の一部にはそのような有限群の既約表現の研究が含まれる．ここで一般には素元の高次の冪が現れて，有限環上の線形群の表現論が必要となるが，そのような表現論は問題の有限群の共役類の分類が本質的に難しいのであま

り進んでいない．ところで所謂 llevel 0 の supercuspidal 表現の場合には，素元の一乗での還元で十分なので，この場合には有限体上の線形群の表現論で十分で，そのような表現論は近年急速に発展している．一方，球関数の Fourier 変換も素元での還元を考えれば有限体上のベクトル空間所の関数となるから，その非零集合を有限体上の概均質ベクトル空間との関連で調べることになる．このようにして我々の第三の研究目的には有限体上の概均質ベクトル空間の理論（言い換えれば Gauss 和の一般理論）の研究が含まれる．

以上，三つの研究目的を遂行する際に Jordan 三重系を道具として用いるのである．従って Jordan 三重系を，通常の理論の場合のように実数体じょうだけではなくて，有理数体上，或いは有限体上でその詳しい構造を調べる必要があると思われる．そこで第四の研究目的として，Jordan 三重系に付随する代数群の詳しい構造の研究を挙げておく．

３．研究の方法
第一の研究目的；正則離散系列表現の球関数の研究，を達成するために Hermite 型コンパクト Jordan 三重系を積極的に利用する．正則離散系列表現の構成は非常に具体的かつ簡単であるので，それを Jordan 三重系の言葉を用いて更に具体的に表示することが出来る．その上で球関数の Fourier 変換を明示的に書き下して，その非零集合を決定する．その際に議論を管状領域の場合に帰着することができるだろうから，そこでは形式的実（或いは Euclid 型の）Jordan 代数の一般論を利用することが出来る．そこから一般の複素対称領域に移行する際に，積分の収束条件を満たすために，コンパクト部分群の既約表現をその部分群に制限したときの分岐則が問題となるから，そこを Jordan 三重系の言葉で記述して解決する．

第二の研究目的；非正則離散系列表現」の球関数の研究，を達成するために，まず，R.Takahashi と T.Arakawa による Sp(1,n) の離散系列の球関数を調べる．一般にコンパクト Jordan 三重系の Hermite 化により Hermite 型のコンパクト Jordan 三重系が生ずる．即ち，Hermite 型簡約可能実 Lie 群 G とその部分群として実有界対称領域の自己同型群としての実簡約可能群 H の対が生ずる．このとき G の正則離散系列表現 π を H に制限した表現は，π の最小の K-タイプ（K は G の極大コンパクト部分群）δ を H の極大コンパクト部分群（それを K の部分群にとる）に制限したユニタリ表現から H に誘導したユニタリ表現であることが知られている．ところで Hotta-Parthasaraty による離散系列表現の構成法を見ると，極大コンパクト部分群の既約表現からの誘導表現の部分空間（Casimir 作用素の固有空間）として離散系列表現を構成する．従って上記において δ を H の極大コンパクト部分群に制限したものが既約ならば，G の正則離散系列表現を H に制限した表現空間の部分空間として H の離散系列表現が構成され，そこから球関数を求めることが出来るであろう．様々なコンパクト Jordan 三重系とその Hermite 化を具体的にみて，夫々の極大コンパクト部分群を決定し，その間で制限した時の分岐則を調べれば良いだろう．

第三の研究目的；p-進線形群の supercuspidal 表現の球関数の研究；を達成するために，特に p-進線形群として一般線形群 GL(n) を詳しく調べる．GL(n) の supercupspidal 表現は詳しく調べられており，その具体的な更生法もよく知られている．特に極大コンパクト部分群を素元で還元した時にできるのは有限体上の GL(n)で，その既約表現は Green により古典的な結果として確立されている．特に有限体上の GL(n) の cuspidal 表現の指標は明示的に書く事ができるのでそれを利用することができる．

第四の研究目的；jordan 三重系に付随する代数群の構造の研究；を達成するには，jordan 三重系の代数体上の構造を詳しく調べる必要があるが，現在のところ，実数体上の構造がよく調べられている段階である．そこで出発点として複素数体上の構造を詳しく調べることから始めたい．

４．研究成果
第一の研究目的；正則離散系列表現の球関数の研究；につては，付随する複素有界対称領域の境界成分の固定部分群となる放物的部分群の冪単部分の中心の Lie 環上で，正則離散系列の最小の K-タイプに関する球関数を Fourier 変換すると，その非零集合は，中心の Lie 環に形式的実 Jordan 代数の構造を与えた時に，それに付随する自己共役等質開凸錐体に等しいことを証明した．これは Siegel 尖点形式に関して Shintani の行った議論の一般化である．具体的には，管状領域の場合に正則離散系列の表現空間を問題の管状領域上の正則関数の空間として実現するが，そのような正則関数を管状領域を決める自己共役等質開凸錐体に台をもつ二乗可積分関数の Fourier 変換として構成することができる．このとき最小の K-タイプに対応する正則関数を与える二乗可積分関数を求めると，球関数の Fourier 変換とその関数の関係が求められる．球関数の非零集合が問題の自己共役等質開凸錐体となることがわかる．一般の

複素対称領域の場合に移行するには，実は積分の収束条件だけが問題となるので，あまり精密な分岐則は必要でないことが判った．積分の収束条件とは正則離散系列が存在するためのK-タイプに関する制限であり，これを関係する Jordan 三重系の言葉で書き下しておくと，一般の複素有界対称領域の場合は管状領域での条件から自動的に満たされることが判った．言い換えれば，正則離散系列が存在するための最小の K-タイプの最高の重さが満たす条件のみで十分であることが判った．

第二の研究目的；非正則な離散系列表現の球関数の研究；については R.Takahashi と T.Arakawa による非正則離散系列表現の球関数はユニタリ群 SU(2,2n) の正則離散系列表現を Sp(1,n) に制限して生ずることを証明した．Jordan 三重系で言えば(2,2n)複素行列のなす Hermite 型コンパクト Jordan 三重系を Hamilton 四元数体を係数とする(1,n)行列のなすコンパクト Jordan 三重系の Hermite 化と見るのである．更に他のコンパクト Jordan 三重系について個々に検討した結果，このような現象は SU(2,2n) と Sp(1,n) の場合限られるようである．

第三の研究目的；p-進線形群の supercuspidal 表現の球関数の研究；については，p-進体上の GL(n) の場合にに詳しく計算した結果，非零集合は開軌道だけではなくて，特異軌道にも広がっていることが判った．実 Lie 群と比較すると意外な結果であるが，興味深いと思われる．

第四の研究目的；Jordan 三重系の複素数体上の構造；に関してはあまり見るべき成果は上げられなかった．一般的な細かい結果はいくつもあるので，それらを踏まえて今後の研究課題として研究を継続する．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

（１） 髙瀬幸一，特集/数論の探求，名著をめぐって 数理科学 (2011)， 査読無，no.571,54-55

（２） 髙瀬幸一，謎をもって謎に答える，或いは問題の解消，現代思想(2011，査読無，vol.39,122-129

（３） K.Takase,On a spherical function of a supercuspidal representation of GLn(F) and its Fourier transform (pre-print,2013)

〔学会発表〕（計１件）

（１） 髙瀬幸一，重さ半整数の Siegel モジュラー形式と Jacobi 形式，第１９回整数論サマースクール「保型形式のリフティング」2011 年９月５日～9 月９日，富士箱根ランド・スコーレムプラザホテル，同報告集，92--162)

〔図書〕（計５件）

（１）髙瀬幸一，群の表現論序説，岩波書店，2013 年，256 ページ

（２）髙瀬幸一，Jordan 三重系と対称領域，Web 上に公開(2013)

（３） 髙瀬幸一，p-進群の表現論；GL2 and beyond，Web 上に公開(2013)

（４） 髙瀬幸一，Building，Web 上に公開(2013)

（５） 髙瀬幸一，保型形式とユニタリ表現（2013 年６月現在数学書房で編集作業中）

６．研究組織

(1)研究代表者

髙瀬　幸一（TAKASE KOICHI）

宮城教育大学・教育学部・教授

研究者番号：６０１９７０９３