

## 自己評価報告書

平成 23 年 4 月 12 日現在

機関番号 : 12102

研究種目 : 基盤研究 (C)

研究期間 : 2008 ~ 2012

課題番号 : 20540006

研究課題名 (和文) アフィン量子群のレベル・ゼロ表現の結晶基底の代数的サイクルとしての実現

研究課題名 (英文) Realization of the crystal bases of level-zero representations of quantum affine algebras as algebraic cycles

研究代表者

内藤 聡 (NAITO SATOSHI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授

研究者番号 : 60252160

研究分野 : 量子群の表現論

科研費の分科・細目 : 数学・代数学

キーワード : 結晶基底, Mirkovic-Vilonen サイクル, Mirkovic-Vilonen 多面体,

Berenstein-Zelevinsky datum, アフィン・リー環, アフィン量子群,

レベル・ゼロ表現, 代数的サイクル

## 1. 研究計画の概要

A 型アフィン・リー環に付随する量子群 (アフィン量子群) のレベル・ゼロ有限次元表現、特に、レベル・ゼロ基本表現とそのテンソル積の結晶基底を、(ダブル) アフィン・グラスマン多様体の中の有限次元部分代数多様体 (サイクル) の族として実現する事が、本研究計画の目的である。

それには、A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底である  $B(\infty)$  を、代数的サイクルとして実現する必要がある。その為に先ず、有限次元半単純リー環の場合にはその様な代数的サイクルのモーメント写像による像となっている Mirkovic-Vilonen 多面体の類似物を、A 型アフィン・リー環の場合にも構成し、それらによって A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底  $B(\infty)$  を実現する。

次に、無限次元代数群  $GL_{\infty}$  に付随するアフィン・グラスマン型の無限次元多様体を考え、この中の代数的サイクルとして、上述の Mirkovic-Vilonen 多面体の類似物にモーメント写像により移される様なものを構成する。

そして、この代数的サイクルを用いて、レベル・ゼロ基本表現やそのテンソル積の結晶基底の実現を与える事を考えている。

## 2. 研究の進捗状況

有限次元複素半単純リー環  $\mathfrak{g}$  に付随する量子群の下半三角部分の結晶基底  $B(\infty)$

は、 $\mathfrak{g}$  をリー環とする連結な複素半単純代数群 (の Langlands 双対群) に付随するアフィン・グラスマン多様体の中の Mirkovic-Vilonen サイクルと呼ばれる代数的サイクルにより実現される。この Mirkovic-Vilonen サイクルのモーメント写像による像が、Mirkovic-Vilonen 多面体と呼ばれる (ユークリッド空間内の) 凸多面体である。そしてこの Mirkovic-Vilonen 多面体は、edge 不等式と tropical Plucker 関係式で特徴付けられた Berenstein-Zelevinsky datum と呼ばれるある種の非正整数の組により定義される事が分かっている。

我々は、 $\mathfrak{g}$  が A 型アフィン・リー環の場合に、上記の Berenstein-Zelevinsky datum の類似物を具体的に構成した。これは、 $A_n$  型の有限次元単純リー環に対する Berenstein-Zelevinsky datum の全体の、 $n$  を無限大に近づけた時の帰納的極限を取り、その極限集合の元であってさらにある種の周期性条件を満たすものとして構成される。そして、これらの Berenstein-Zelevinsky datum の類似物の全体の上にクリスタルの構造を入れ、このクリスタルのクリスタル・グラフが連結である事を示した。

さらに、この結果を使って、上述の Berenstein-Zelevinsky datum の類似物の全体が成すクリスタルが、A 型アフィン量子群の下半三角部分の結晶基底  $B(\infty)$  とクリスタルとして実際に同型である事を証明する事が出来た。

### 3. 現在までの達成度

③ やや遅れている。

(理由)

これは、上の研究の進捗状況の所で述べた様に、Berenstein-Zelevinsky datum や Mirkovic-Vilonen 多面体等の組合せ論的な道具立てはかなり準備されて来たのであるが、無限次元代数群  $GL_{\infty}$  に付随するアフィン・グラスマン型の無限次元多様体を考え、それと (ダブル) アフィン・グラスマン多様体との関係等の、幾何学的な方向の研究結果があまり得られていないと思われるからである。

### 4. 今後の研究の推進方策

上の現在までの達成度の所で述べた様に、幾何学的な方向の研究が遅れていると思われるので、研究計画を変更する事を考えている。つまり、A 型アフィン量子群のレベル・ゼロ基本表現やそのテンソル積の結晶基底の幾何的な実現を与える代数的サイクルを構成する代わりに、それらのモーメント写像による像である筈の凸多面体を、Mirkovic-Vilonen 多面体の類似物として構成する事を本研究計画の目的としたいと考えている。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Polytopal estimate of Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, Adv. Math., Vol. 226, pp. 2587-2617, 2011, 査読有り.
- ② S. Naito and D. Sagaki, Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, Adv. Math., Vol. 221, pp. 1804-1842, 2009, 査読有り.

[学会発表] (計 3 件)

- ① S. Naito, S. Kato, and D. Sagaki, Tensor products and polytopal estimates of Mirkovic-Vilonen polytopes, The 5<sup>th</sup> International Conference on Representation Theory, 2010 年 8 月 9 日, 西安 (中華人民共和国).
- ② D. Sagaki and S. Naito, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank

affine algebras of types  $B_{\infty}$ ,  $C_{\infty}$ ,  $D_{\infty}$ , The 10<sup>th</sup> International Conference "Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups 2010", 2010 年 8 月 6 日, 名古屋大学.

- ③ S. Naito, S. Kato, and D. Sagaki, Polytopal estimate of Mirkovic-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, International Workshop on "Combinatorial and Geometric Approach to Representation Theory", 2009 年 9 月 21 日, ソウル国立大学 (大韓民国).