

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540008

研究課題名(和文) 有限群の表現論におけるブルエ予想の解決

(英文) Solution of Broue's conjecture in representation

Theory of finite groups

研究代表者

越谷 重夫 (KOSHITANI SHIGEO)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30125926

研究成果の概要(和文)：以下の場合に「ブルエ予想」が解けた。まず、散在型単純群の一つであるヤンコーの第4番目の単純群 J_4 に対して、ブルエ予想を完全に解いた。次に、同様にやはり散在型単純群の一つである原田・ノートン群 HN に対してもブルエ予想を完全に解いた。また、ブルエ予想証明に役立つ自明なソースを持つ加群の見つけ方に関する定理を証明した。更には、ブルエ予想の変形版、類似であるルキエ予想に関してのある結果を得た。その他、考えているブロックのカルタン行列の固有値とブルエ予想の関係についての定理を得た。

研究成果の概要(英文)：For the subject “Broue’s conjecture” we have proven the following. First of all, we proved Broue’s conjecture for one of the sporadic simple groups, say the Janko’s simple group J_4 , joint work with N.Kunugi and K.Waki. Secondly, we proved the Broue’s conjecture also for one of the sporadic simple groups, say Harada-Norton simple group HN , joint work with J.Mueller. We also proved a kind of tool by which we can find out trivial source modules, joint work with N.Kunugi. With M.Holloway and N.Kunugi, we proved also a theorem which was on Rouquier’s conjecture. The conjecture is a kind of analogue of Broue’s conjecture. Finally we proved a result on eigenvalues of the Cartan matrices of blocks of finite groups, jointly with Y.Yoshii.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：表現論、有限群、ブルエ予想、ブロック、森田同値、導来同値、アルペリン予想

1. 研究開始当初の背景

- (1) ブルエ予想は1988年ごろ M.ブルエ(パリ第7大学)によって提言された。有限群の表現論にとどまらず、かなり多くの他分野にも影響を与える大掛かりな重要な予想である。表現が有限型、あるいは

無限型であってもよい性質を持っている場合には J.リッカド、M.リンケルマン等によってブルエ予想は解決されていた。

- (2) 一方、一般の無限表現型を持つブロックに対しては、有限群が対称群、一般線形

群などの場合を除いては、ほとんど手つかずであった。一部、研究代表者 越谷重夫と連携研究者 功刀直子による位数9の可換群を不足群に持つ主ブロックに対してのブルエ予想等があっただけであった。また単純群に帰着できる定理も一般には無いのであるが、それでもまず、重要な有限単純群、特に散在型単純群に対して、ブルエ予想を証明することは重要課題であった。

2. 研究の目的

- (1) 上記の背景を鑑み、重要な散在型単純群に対してブルエ予想を解くことを目標とする。
- (2) ブルエ予想を解くために十分役立つよい道具となり得る定理を開発、発見する。
- (3) ブルエ予想のより一層の理解を深めるためにも、その周辺の関係する予想、例えばルキエ予想に関して考察を深める。

3. 研究の方法

- (1) ブルエ予想に関連する研究をしている世界一流の研究者たちを、千葉大学に招へいして、直に研究討論を重ねた。具体的に招へいしたのは、G.ナヴァロ（スペイン）、J.チュアング（イギリス）、R.ヴァルデッカー（ドイツ）等である。これらの研究者たちは世界的にも第一線で活躍していて、その彼らと直接研究討論できたので、今回の研究目的に大いに役立った。
- (2) またこれに関する国際研究集会を日本で開催する。その際、有限群の表現論のみにとどまらず、周辺分野、例えば有限次元代数の表現論および可換環の表現論に関する研究者たちにも講演を頼んだ。具体的には、2008年11月に京都大学数理解析研究所で、越谷が研究集会を開いた。その際の報告集も2010年に同じ京都大学数理解析研究所から出版された。
- (3) 一番目の逆であるが、研究代表者がブルエ予想について研究している一流の研究者たちを訪問する。特に、ドイツ、フランス、スイス、イギリス、アメリカ合衆国等を訪問し、研究打合せ、および我々の研究成果を世界に発表、発信する。具体的には、スイス・ローザンヌ大学テベナを訪問した。ここで開かれていた研究集会で、ブルエ予想に関して得られた結果を発表した。フランス・パルディー大学のR.スタンキュ、S.ブックク、A.チンマーマンを訪問して、ブルエ予想およびアルペリン予想について研究討論を行った。また、やはり共同研究者であるR.ケサールおよびM.リンケルマンがいるイギリス・アバディーン大学を訪問した。

ブルエ予想に関して多くの研究討論の時間を持つことができた。また、この際、ブルエ予想の弱い形、つまり既約指標に関するブルエ予想を、位数8の不足群を持つ一般のブロックに対して考えた。

- (4) 日本国内に限らず、数多くの海外での研究集会、セミナーで、今回の研究で得られた結果を発表した。国を挙げると、アイルランド、ドイツ、イギリス、スイス、フランス、アメリカ合衆国等である。例えば、2010年12月には、イギリス・ロンドン市大学での研究集会で、1時間の招待講演を行い、ブルエ予想に関しての結果を発表した。
- (5) 現在のその時点での世界の最新情報は刻々と変わるが、それにしても、関係する研究図書を購入することは重要である。今回も、有限群の表現論に関する図書を何冊か購入した。実際それらが有効に働いた。

4. 研究成果

- (1) 散在型単純群の一つであるヤンコーの第4番目の単純群J4に対して、ブルエ予想を完全に解いた（連携研究者 功刀直子および脇克志との共同研究）。実際は、ポイントとして、位数9の巡回群ではない不足群を持つ非主ブロックについてブルエ予想を解くことが鍵となった。
- (2) 同様にやはり散在型単純群の一つである原田・ノートン群HNに対してもブルエ予想を完全に解いた（ドイツ・アーヘン大学 J.ミュラーとの共同研究）。この場合も上記とある意味で似ていて、やはり、位数9の巡回群ではない不足群を持つ非主ブロックに対して、ブルエ予想を解くことが本質的であった。
- (3) ブルエ予想証明に役立つ自明なソースを持つ加群の見つけ方に関する定理を証明した（連携研究者 功刀直子との共同研究）。実際、ブルエ予想を解く場合には、この自明なソースを持つ直既約加群を使って議論することが非常に重要となり、実際これを足掛かりとして上記の(1),(2)の中でも、この定理が有効な道具として使われた。
- (4) ブルエ予想の変形版類似であるルキエ予想に関してのある結果を得た（イギリス・オックスフォード大学 M.ホロウェーおよび連携研究者 功刀直子との共同研究）。ルキエのこの予想とは、ブルエ予想と違い、考えている不足群が可換群ではなくともその超焦点部分群が可換の場合である。その場合に考えている2つのブロックの圏が良い関係を持っている

のではないか、という予想である。

- (5) 考えているブロックのカルタン行列の固有値とブルエ予想の関係についての定理をえた(吉井豊との共同研究)。これはもともとは、和田俱幸、清田正夫、功刀直子らが研究を進めてきた、一般のブロックのカルタン行列の固有値が整数になるための条件等と非常に関係している。このブロックの不足群が非可換である場合についても考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi and Katsushi Waki, Broue's abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group J_4 , Journal of Pure and Applied Algebra 212 (2008) 1438-1456
- ② Shigeo Koshitani and Naoko Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, Mathematische Zeitschrift 265 (2010) 161-172
- ③ Miles Holloway, Shigeo Koshitani and Naoko Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p , Archiv der Mathematik 94 (2010) 101-116
- ④ Shigeo Koshitani and Juergen Mueller, Broue's abelian defect group conjecture holds for the Harada-Norton sporadic simple group HN, Journal of Algebra 324 (2010) 394-429
- ⑤ Shigeo Koshitani and Yutaka Yoshii, Eigenvalues of Cartan matrices of principal 3-blocks of finite groups with abelian Sylow 3-subgroups, Journal of Algebra 324 (2010) 1985-1993

[学会発表] (計 12 件)

- ① S. Koshitani, Examples of Broue's abelian defect group conjecture, Duality and Involutions in Representation Theory, アイルランド・国立大学 Maynooth, 2008 年 8 月 20 日
- ② 越谷重夫, Lifting of equivalences and perfect isometries between blocks of finite groups, 有限群のと代数の表現論およびその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 11 月 20 日
- ③ 越谷重夫, New results on Broue's and Rouquier's conjecture, 有限群・頂点作

用素代数と組合せ論

京都大学数理解析研究所, 2009 年 1 月

- ④ S. Koshitani, Blocks with metacyclic defect groups Representations of Finite Groups (有限群の表現) オーバーヴォルフアッハ 数学研究所, Oberwolfach, ドイツ, 2009 年 3 月
- ⑤ S. Koshitani, Broue's abelian defect group conjecture and its analogue Conference on Algebraic Topology, Group Theory and Representation Theory, SMO (Sabhal Mor Ostaig) スカイ島 Isle of Skye, Scotland イギリス, 2009 年 6 月
- ⑥ 越谷重夫, Remarks on source algebras of blocks with cyclic defect groups, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 信州大学 (数理解析の研究集会), 2009 年 9 月 1 日
- ⑦ 越谷重夫, Morita equivalences between blocks of finite groups 代数的組合せ論および関連する群と代数, 信州大学 (京大数理解析の研究集会), 2009 年 11 月
- ⑧ 越谷重夫, 群を表現するとは—モジュール表現論 現在過去未来, 日本数学会春季総合分科会, 企画特別講演, 慶應大学理工学部, 2010 年 3 月
- ⑨ S. Koshitani, Relative projective cover works for Broue's abelian defect group conjecture, Group Representation Theory and Related Topics (Jacques Thevenaz's 60th birthday), スイス・連邦工科大学ローザンヌ EPFL, 2010 年 6 月
- ⑩ S. Koshitani, Blocks with small defect groups, 第 51 回ブリストル-レスター-オックスフォード-ロンドン市 研究集会, ロンドン・シティー大学数理解析科学科 (London City) イギリス, 2010 年 12 月
- ⑪ 越谷重夫, 有限群の表現における最近のある進展代数的符号理論、組合せデザインとその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 3 月
- ⑫ S. Koshitani, Blocks of finite groups with small defect, 有限群の表現論における大域局所予想, カナダ・バンフ国際研究所, 2011 年 3 月

[図書] (計 1 件)

- ① 越谷重夫, 有限群と代数の表現論およびその周辺, 数理解析研究所講義録 1709, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 8 月

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/
~koshitan/](http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~koshitan/)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

越谷 重夫 (KOSHITANI SHIGEO)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30125926

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

野澤 宗平 (NOZAWA SOHEI)
千葉大学・普遍教育センター・教授
研究者番号：20092083

北詰 正顕 (KITAZUME MASAOKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60204898

西田 康二 (NISHIDA KOJI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60228187

松田 茂樹 (MATSUDA SHIGEKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90272301

大坪 紀之 (OTSUBO NORIYUKI)
千葉大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60332566

功刀 直子 千葉大学・大学院理学研究科・
教授 (KUNUGI NAOKO)
東京理科大学・理学部第一部・講師
研究者番号：50362306