様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２０日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540013
研究課題名（和文）　分岐を制限したガロアの逆問題とその応用に関する研究

研究課題名（英文）　Research of the inverse Galois problems with restricted ramifications and their applications

研究代表者
野村　明人（NOMURA　AKITO）
金沢大学・機械工学系・准教授
研究者番号：00313700

研究成果の概要（和文）：任意の有限 p 群 G に対して，代数体 k と k 上の不分岐ガロア拡大 K/k でそのガロア群が G と同型なものが存在することは Fröhlich により証明されている．しかし，Fröhlich の手法では基礎体 k の次数が大きくなってしまう．そこで，基礎体 k の次数がどのくらい小さくできるかという問題を考察し，k として有理数体上の初等アーベル p 拡大が取れることを証明した．その系として，イデアル類群が大きな p 冪位数の元を含むような初等アーベル p 拡大の存在も証明した．

研究成果の概要（英文）：Fröhlich proved that for any p-group G, there exists a number field k and the unramified Galois extension K/k such that the Galois group is isomorphic to G. In Fröhlich's method, the degree of the base field k is high in general. We wanted to reduce the degree of the base field k as much as possible. And we proved that the base field k can be chosen as elementary abelian p-extension over the rational number field. As a corollary of the theorem, we proved that there exists an elementary abelian p-extension such that the ideal class group contains an element of big order.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ガロアの逆問題，代数体の埋め込み問題，分岐，類数，類体塔，イデアル類群，不分岐拡大

１．研究開始当初の背景

分岐条件を付けたガロアの逆問題，即ち「代数体 k と有限群 G が与えられたとき，不分岐ガロア拡大 L/k でそのガロア群が G と同型なものが存在するか？」… (*)
という問題を考える．G がアーベル群の場合，この問題（*）はイデアル類群の構造と密接に関係していることが Takagi－Artin の類体論によってわかっている．類体論が証明された当初より，類体論の一般化は数論における重要な課題の一つであった．一般化の一つの方向である高次元化は加藤和也氏，斎藤秀司氏，S.Bloch などにより目覚しい成果が得ら

れていた．しかし，もう一つの「アーベル拡大から冪零拡大への一般化」については，十分な成果が得られているとは言えなかった．

また，関連する重要な問題として「類体塔問題」がある．これは代数体 k の最大不分岐 p 拡大のガロア群 Γ(k)[p]の構造を決定する問題のことである．歴史的には，1916 年に Furtwängler によって「Γ(k)[p]は常に有限群か？」という問題が提出されたが，これは Golod-Schafarevich(1964)により無限群になるための十分条件と例が与えられ否定的に解決された．その後，この十分条件は Schoof や Maire により精密化された．また，Γ(k)[p]のより具体的な構造については，1993 年に Fontaine と Mazur による予想「Γ(k)[p]は，それが無限群ならば p 進解析的ではない」が提出されている．

分岐条件を付けたガロアの逆問題の研究は，対称群や交代群の場合には，Fröhlich (Mathematika (1962))や Yamamoto(Osaka J. Math. (1970)) の研究があった．一方，非アーベル p 群に関しては，群の位数が小さい場合に A. Scholz－O. Taussky(J. Reine Angew. Math(1934))，C. Bachoc － S.H. Kwon(Acta Arith.(1992))，L. Bartholdi－M. R. Bush(J. Number Theory(2007)) などの個別の研究があるだけであった．

研究代表者の野村は，Nomura,A. On the existence of unramified p-extensions, Osaka J. Math. 28(1991), 55－62 で，代数体の埋め込み問題の解の分岐をコントロールする手法を提案した．この理論を発展させ上記問題（*）に応用できると考えた．これが着想に至った経緯であった．

２．研究の目的

研究目的は，非アーベル p 群に対して１．研究開始当初の背景で述べた問題（*）を考察し，類体論の冪零拡大への一般化の足がかりを得ることである．具体的には，関連する以下の問題を順次考察し，結果を得ることである．

（１）有理数体は類数が１なので，有理数体上の不分岐 p 拡大は存在しない．従って，p 群 G に対する上記問題（*）を有理数体上で考える意味は無い．そこで，少し一般化した最少分岐問題

「ガロア群が p 群 G と同型になるような有理数体上のガロア拡大を構成する際，そこで分岐する素数の個数はどれくらい少なくできるか？」

を考察することが研究目的の一つである．

（２）任意の p 群 G が，ある代数体 k 上の不分岐拡大のガロア群になることは，Fröhlich や Yamamoto により証明されていた．しかし，Fröhlich や Yamamoto の手法だと基礎体 k の次数が大きくなってしまうという問題があった．そこで，不分岐 G 拡大を構成する際に基礎体 k の次数をどのくらい小さくできるかという問題を考察することが，本研究の目的の一つである．

（３）上記問題（*）の応用として，代数体 k の最大不分岐 p 拡大のガロア群 Γ(k)[p]が非アーベル群になるための条件を考察する．K が２次体の場合には Hajir による研究が，k が有理数体上のある種の(2,2)拡大体の場合には吉田英司氏の研究があった．吉田氏の結果を一般の(2,2)拡大体に拡張することが，本研究の目的の一つである．

（４）k が２次体で p が奇素数のとき，k のイデアル類群の p ランクが３以上ならば Γ(k)[p]は無限群になることが Schoof によって証明されており，３次体への拡張が Maire により得られている．本研究では，k が２次体でイデアル類群の p ランクが２の場合に，Γ(k)[p]が無限群になるための条件を求めることが研究目的の一つである．

（５）Fontaine-Mazur 予想の Boston による定式化「任意の代数体 k に対して，Γ(k)[p]はそれが無限群ならば powerful ではない」がある．Boston は，この予想に関連する次の問題を提出した．

Boston の問題「p を奇素数とし，K(p)を代数体 K のヒルベルト p 類体とする．K(p)の類数が p で割り切れるとき，次の条件をみたすガロア拡大 M/K(p)/K が存在するか？

① M/K(p)は不分岐

② exp(G(M/K))=exp(G(K(p)/K))

ここで，exp(H)は H の群としての指数を表す」

この問題に対する答えが否定的であるような K が存在することは，Lemmermeyer により指摘されている．一方，代表者の野村は，J. Number Theory 58(1996), Proc. Japan Acad. 73(1997)で，この問題に対する答えが肯定的であるような具体例を構成した．この問題に対する答えが肯定的であるような代数体の別の族を構成することが本研究の目的の一つである．このような例を多く構成することは，Γ(k)[p]の構造の特徴を調べる上で重要であると考えた．

３．研究の方法

代数体の埋め込み問題の理論を利用して，不分岐拡大を構成する．ガロア拡大 K/k と群拡大(ε)：1→A→E→G(K/k)→1 が与えられたときに，ガロア拡大 L/K/k で自然な完全列 1→G(L/K)→G(L/k)→G(K/k)→1 が(ε)と一致するものが存在するかどうかを考察するのが代数体の埋め込み問題であり，この埋め込み問題を(K/k, ε)と表す．このような L が存在するとき，L を埋め込み問題(K/k, ε)の

解と呼ぶ．

本研究では，不分岐拡大を構成する必要があるので，解の分岐をコントロールし L/K が不分岐である解を構成する必要がある．分岐を制限したガロア拡大の構成方法としては，Scholz によって提案された手法がある．一方，１．研究開始当初の背景でも述べたように，研究代表者の野村は Osaka J. Math(1991)で埋め込み問題の解の分岐をコントロールする手法を提案した．本研究では，Scholz-野村の手法を拡張し，非アーベル p 群に応用する．さらに，分岐を消すためのもう一つの手法である Abhyanker の補題を併用した．

また，本研究では群論的考察が必要不可欠であった．研究目的（１）の研究では，p 群の中心列に関する結果を利用した．p 群の具体的な計算に対しては，計算機を用い計算代数ソフト GAP を利用した．

４．研究成果

分岐を制限したガロアの逆問題を考察し，以下の結果を得た．

（１）　最少分岐問題について

p 群 G のランクを d(G)で表す．p 群 G に対してガロア拡大 K/**Q** に tamely ramified という条件を付けるときに分岐する素数の個数をどのくらい少なくできるか？という問題を考える．その最少個数を t-ram(G)で表すとき，「t-ram(G)=d(G)」…(**) という予想があるが，一般的には未解決である．Plans(Pacific J. Math. 2004)が，t-ram(G)の上からの評価（不等式）を与えている．

本研究では，Plans の不等式を改良し，それが実質的な改良であることを示す具体例を上げた．また，GAP による数値計算を行い，位数が 243 以下の３群に対して予想(**)が正しいことを証明した．その後，Kisilevsky と Sonn(Composito Math. 2010)が群の wreath 積に注目し，ある種の族について予想(**)が正しいことを証明している．代表者は，Kisilevsky-Sonn のアイディアの野村の手法への応用を試みたが，現時点では新しい結果は得られていない．これについては，今後の課題である．

（２）不分岐 G 拡大の構成について

p 群 G に対して，代数体 k と不分岐ガロア拡大 K/k でそのガロア群が G と同型なものが存在するか？という問題がある．

研究目的（２）でも述べたように，この問題は Fröhlich や Yamamoto により肯定的に解決されている．そこで，不分岐 G 拡大を構成する際に基礎体 k の次数をどのくらい小さくできるかという問題を考察した．

得られた主結果は「任意の p 群 G に対して，有理数体上の初等アーベル p 拡大 k とその不分岐ガロア拡大 K/k でそのガロア群が G と同型なものが存在する」と述べることができる．ここで群 G の Frattini 群の位数を p^m とすると，k の次数は p^{m+1} 以下に取れることもわかった．これは，Fröhlich や Yamamoto の構成法よりも基礎体 k の次数はかなり小さくなっている．

また，その系として「任意の自然数 n に対して，有理数体上の初等アーベル p 拡大 k でそのイデアル類群が位数 p^n の元を含むものが存在する」を証明した．

以下で本研究の今後の展望と課題について述べる．

２．研究の目的で述べた（３）（４）（５）の研究については，まだ十分な成果が得られていないが，考察の方向性は分かってきた．

（３）については，吉田英司氏の手法（Acta Arith. 2003）と類数関係式，埋め込み問題の理論を組み合わせることでアプローチできると考えている．この手法は(2,2)拡大だけでなく，一般の初等アーベル２拡大にも適用できると考えている．

（４）については，中心拡大でない群拡大に対する埋め込み問題の理論を整備する必要があると考えている．これには，群論的な深い考察と GAP による数値計算が必要になると予想される．

（５）については，p=3,5 などの小さい素数に対して GAP による数値計算を行うと共に，クラス２の p 群の分類理論を利用することで進展があると期待される．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① Nomura, A., On the existence of unramified p-extensions with prescribed Galois group, Osaka J. Math. 47(2010), 1159－1165, 査読有, 金沢大学学術情報リポジトリ KURA http://dspace.lib.kanazawa-u.ac.jp/dspace/handle/2297/26245

② Ito, T., Terwilliger, P, How to sharpen a tridiagonal pair, J. Algebra Appl., 9(2010), 543－552, 査読有

③ Ito, T., Terwilliger, P, The augmented tridiagonal algebra, Kyushu J. Math., 64(2010), 81－144, 査読有

④ Ito, T., Terwilliger, P, Tridiagonal pairs of q-Racah type, J. Algebra., 322(2009), 68－93, 査読有

⑤ Ito, T., Terwilliger, P, Distance-regular graphs of q-Racah type and the q-terahedron algebra,

Michigan Math. J., 58(2009), 241－254, 査読有
⑥ Ito, T., Terwilliger, P, Distance-regular graphs and the q-terahedron algebra, European J. Combin., 30(2009), 682－697, 査読有
⑦ 平林幹人, Introduction to Hasse's book「Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper」, 北陸数論研究集会報告集, 7(2009), 1－45, 査読無
⑧ Nomura, A., Notes on the minimal number of ramified primes in some l-extensions of Q, Arch. Math,, 90(2008), 501－510, 査読有, 金沢大学学術情報リポジトリ KURA http:// dspace.lib.kanazawa-u.ac.jp/dspace/handle/2297/10951
⑨ Ito, T., Finite-dimensional irreducible modules for the three-point sl_2 loop algebra, Comm. Algebra, 36(2008), 4557－4598, 査読有
⑩ Hirabayashi, M., A generalization of Newman's formula, Arch. Math., 90(2008), 223－229, 査読有

〔学会発表〕(計１４件)
① Ito, T., Tridiagonal pairs and Drinfel'd polynomials,「頂点作用素代数・有限論・組合せ論の研究」RIMS 研究集会, 2010 年 12 月 13 日, 京都大学数理解析研究所（京都府）
② 木村巌, 数論研究者のための Sage, 代数的整数論とその周辺, 2010 年 12 月 10 日, 京都大学数理解析研究所（京都府）
③ 木村巌, Sage の紹介, 数学ソフトウェアとフリードキュメント１１, 2010 年 9 月 21 日, 名古屋大学（愛知県）
④ 伊藤達郎, tridiagonal pair と q-Onsager algebra, 第 55 回代数学シンポジウム, 2010 年 8 月 12 日, 北海道大学（北海道）
⑤ 木村巌, ２次体の tame kernel の２部分の支配体について, 九州代数的整数論 2010, 2010 年３月２０日, 九州大学（福岡県）
⑥ 木村巌, 田谷久雄, ２次体を中心とした代数体の類数の非可除性について, 第３回若手ゼータ研究集会, 2010 年 2 月 19 日, 名古屋大学（愛知県）
⑦ Ito, T., Towards the classification of P- and Q- polynomial association schemes, JAIST Workshop on METRIC GRAPH THEORY, 2009.11.12, Kanazawa Culture Hall(Ishikawa)
⑧ 木村巌, ２次体の tame kernel の２部分について, 北陸数論セミナー, 2009 年５月２１日, 金沢大学サテライトプラザ（石川県）
⑨ 野村明人, ある種の(2,2)拡大体のイデアル類群の構造について, 北陸数論セミナー, 2009 年５月７日, 金沢大学サテライトプラザ（石川県）
⑩ 平林幹人, 虚２次体の合併体の単数指数の決定法について, 北陸数論セミナー, 2009 年４月２３日, 金沢大学サテライトプラザ（石川県）
⑪ 伊藤達郎, TD-pair の分類について, ミニ集会「代数的組合せ論」, 2009 年 3 月 18 日, 九州大学（福岡県）
⑫ 平林幹人, Hasse の本「アーベル体の類数について」の紹介, 第７回北陸数論研究集会, 2008 年 12 月 26 日, 金沢大学サテライトプラザ（石川県）
⑬ Kimura, I., Distribution of class groups of quadratic fields and related topics, Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics 2008, 2008.11.12, Tohoku University (Miyagi)
⑭ 野村明人, 分岐を制限した代数体の埋め込み問題とその応用, ガロア理論とその周辺 2008, 2008 年 9 月 9 日, 徳島大学（徳島県）

〔図書〕(計１件)
① 和田秀男（監訳), 木田雅成, 松尾和人, 木村巌, 佐藤篤, 長谷川雄之, 朝倉書店, 素数全書－計算からのアプローチ（クランドール, ポメランス著：Prime Numbers－A Computational Perspective）の翻訳, 2010 年, 94 頁～189 頁

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ms.t.kanazawa-u.ac.jp/~maths/nomura/nompaper.htm

６．研究組織
(1)研究代表者
野村　明人（NOMURA　AKITO）
金沢大学・機械工学系・准教授
研究者番号：00313700

(2)研究分担者
伊藤　達郎（ITO　TATSURO）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：90015909

(3)連携研究者
平林　幹人（HIRABAYASHI　MIKIHITO）
金沢工業大学・基礎教育部・教授
研究者番号：20167612

木村　巌（KIMURA　IWAO）
富山大学・理工学研究部・准教授
研究者番号：10313587