

自己評価報告書

平成23年 3月31日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540017

研究課題名（和文） 代数的組合せ論の総決算的研究

研究課題名（英文） Conclusive study of algebraic combinatorics

研究代表者

坂内 英一 (BANNAI EIICHI)

九州大学・大学院数理学研究院・学術研究者

研究者番号：10011652

研究分野：代数的組合せ論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組合せ論，アソシエーションスキーム，モジュラー形式，デザイン，tight デザイン，格子，コード，Lehmer 予想

1. 研究計画の概要

代表者の長年の代数的組合せ論の研究の総決算を行うと言う形で、いままでの研究の総まとめをしたいと言うのがこの研究の主旨である。置換群の多重可移という性質と、原始的であると言う性質の意味をもっと良く理解したいということが研究の元々の出発点であったが、それをより広げた形で、アソシエーションスキーム、あるいは球面上の代数的組合せ論と言う枠組みで、アソシエーションスキーム上の、あるいは球面上のt-デザインにおけるtの意味を良く理解したいということであった。具体的には、アソシエーションスキーム自身の分類問題に加えて、アソシエーションスキームの部分集合である、コード、デザインの研究を行い、さらに球面上の良い有限集合の研究、およびその拡張であるユークリッドデザイン等の研究を行った。特に、ユークリッド格子の殻として出来る球面t-デザインの研究(Lehmer予想のtoy modelsの研究)、ユークリッドデザインとcoherent configurationとの関係の研究、特にtightなユークリッドt-デザインの構成、分類問題に努力を集中して研究を行った。

2. 研究の進捗状況

(1) 総決算的研究という意味において、我々の研究を世に問う2つの重要なサーベイ論文([5],[6])を発表した、また伊藤達郎、坂内悦子と共同で、本「代数的組合せ論」を執筆中である。

(2) 研究問題に対する具体的成果は次の通りである。球面上、あるいはユークリッド空

間内の良い有限集合の研究が主目的であり、2つの同心球面上のtightなt-デザインの種類についてt=5,7の場合に完全な結果を得て既に発表した、新しくt=9の場合に完全な結果を得、論文([1])として投稿し、掲載決定を得た(坂内悦子との共同研究)。ここで用いた方法は他の大きなtに対しても拡張可能であることを示唆しており、現在研究を進展中である。なお22次元ユークリッド空間の2つの同心球面上のtightな6-デザインの新しい例も見いだしている([2] 坂内悦子および重住淳一との共同研究)。球面t-デザインとアソシエーションスキームの関係性を述べたDelsarte-Goethals-Seidelの結果の類似として、良いユークリッドt-デザインにcoherent configurationの構造が入るという結果を得ていたが、それをを用いて特にtightなユークリッド4-デザインの種類問題において新しい成果([4]坂内悦子との共同研究)を得た。他に、実双曲空間に於けるt-デザインの定義を得ることに成功し、その概念と \mathbb{Q} -多項式スキームに於けるrelative t-デザインとの関係を明確にし、論文を投稿した。ラマヌジャン τ 関数の値は決して0にならないと言う整数論に於けるLehmer予想と格子の殻として得られる球面上のデザインとの間に密接な関係があることをVenkovが見いだしていた。Lehmer予想自体は難しく解決までにはまだまだ多くの困難があるが、三枝崎剛との共同研究において、toy modelと呼ぶ2次元の格子の場合に類似の結果を得て論文に発表した(論文[3])。またその種々の拡張についても研究を進めておりいくつかの論

文を投稿したところである。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

理由：現在までの3年間に発表されたりあるいは掲載の確定した論文は計約14編になり、投稿中の論文も約5編ある。ただし、特別大きな問題、例えば、有限単純群の分類あるいは t -重可移群の分類問題を、代数的組合せ論の立場から見直すこと、などにはまだ取りかかれていない。

4. 今後の研究の推進方策

今後の研究は、今までの3年間にやって来た研究の方向を継続して進めたいと思う。どこかの段階で、成果の挙げられる具体的問題を越えて、全く解決の見通しが得られていないいくつかの大問題にも挑戦したいと思っている。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, Tight 9-designs on two concentric spheres, J. of Math. Soc. Japan, 印刷中, 査読有り
- ② Eiichi Bannai, Etsuko Bannai and Junichi Shigezumi, A new example of Euclidean tight 6-design, Annals of Combinatorics, 印刷中, 査読有り
- ③ Eiichi Bannai and Tsuyoshi Miezaki, Toy models for D.H. Lehmer's conjecture, J. of Math. Soc. Japan 62 (2010) 687-705, 査読有り
- ④ Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, Euclidean designs and coherent configurations, Contemporary Mathematics 531 (2010), 59-93. (ed. Richard Brualdi) (American Math. Soc.), 査読有り
- ⑤ 坂内英一, 純粋数学としての組合せ論, 数学 62 (2010), 433-452, 査読有り
- ⑥ Eiichi Bannai and Etsuko Bannai, A survey on spherical designs and algebraic Combinatorics on spheres, Europ. J. Combinatorics, 30 (2009), 1392-1425, 査読有り

[学会発表] (計7件)

- ① Eiichi Bannai; A survey on spherical designs and Euclidean designs (plenary

talk) Geometry, Topology, Algebra and Number Theory, Applications

(Delone-120 Conference), Steklov Math.

Inst., Moscow, Russia, Aug 16-20, 2010.

- ② Eiichi Bannai; Euclidean designs and cubature formulas for spherical symmetric measures on R^n , Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds (30 min), Vanderbilt Univ, Nashville, USA, May 19, 2010.
- ③ Eiichi Bannai; Spherical designs and toy models for D.H. Lehmer's conjecture in number theory (60 min.), University of Rome 1 (La Sapienza), April 22, 2019.
- ④ Eiichi Bannai; Spherical designs and D. H. Lehmer's conjecture, (50 minutes), Focused Week on Integral Lattices, University of Florida, Gainesville, Florida, USA., Feb 16, 2010,
- ⑤ Eiichi Bannai; Review of spherical designs, (five 50 minute talks), CIMPA-UNESCO-PHILIPPINES School: Semidefinite Programming in Algebraic Combinatorics, July 20-July 31 (20, 21, 22, 27, 28), 2009, University of the Philippines, Manila.
- ⑥ Eiichi Bannai; Toy models of D. H. Lehmer's conjecture (60 minutes), The analytic theory of modular forms at the 65th birthday of Roelof Bruggeman, Woudschoten, The Netherlands, June 18, 2009.
- ⑦ Eiichi Bannai: "Spherical designs and association schemes versus Euclidean designs and coherent configurations", (60 minutes), May 16, 2009, IPM - International Workshop on Combinatorics 2009, IPM, Tehran, Iran.