

機関番号：17201

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540018

研究課題名 (和文) モジュラー多様体の幾何とジーゲル保型形式の合同、 $p$  進理論研究課題名 (英文) Geometry of modular varieties and congruence,  $p$ -adic theory of Siegel modular forms

研究代表者

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：20201923

研究成果の概要 (和文) : ジーゲルモジュラー多様体の数論幾何的性質を調べることにより、ジーゲルモジュラー形式の合同問題を解決し、 $p$  進ジーゲルモジュラー形式の重さが  $p$  進数として定まることを示した。またベクトル値ジーゲルモジュラー形式の数論的理論と、ベクトル値  $p$  進ジーゲルモジュラー形式の理論の基礎付けを与え、 $p$  進作用素の自然な構成を与えた。さらに環上のジーゲルモジュラー形式のなす環 (保型形式環) の構造を調べ、 $6$  を逆元として持つ環上において、次数 2 のジーゲルモジュラー形式のなす環の構造を決定した。

研究成果の概要 (英文) : By studying arithmetic geometry of Siegel modular varieties, we solved the congruence problem of Siegel modular forms, and showed that weights of  $p$ -adic Siegel modular forms are determined as  $p$ -adic numbers. Further, we constructed a basic theory of arithmetic vector-valued Siegel modular forms and vector-valued  $p$ -adic Siegel modular forms with natural  $p$ -adic operators. Moreover, we studied the ring structure of Siegel modular forms over rings in which  $6$  is invertible, and decided this structure in the degree 2 case.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数論幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：モジュラー多様体、モジュラー形式、合同

## 1. 研究開始当初の背景

本研究に関連する主な動向としては、

- (1) Swinnerton-Dyer, Serre による楕円保型形式の合同と  $p$  進理論、及び Deligne, Katz によるそれらのモジュライ理論的解

積 (1970 年代)

- (2) Hida による通常  $p$  進楕円保型形式とガロア表現の変形理論と応用 (1980～90 年代)
- (3) Faltings, Chai による高次元モジュラー多様体の数論的コンパクト化と、ジーゲ

ル保型形式の数論的研究への応用 (1990年)

- (4) Böcherer, 長岡による一般 Hasse 不変量の保型形式としての持ち上げの構成 (2006年)

が挙げられる。

応募者は代数曲線のモジュライ空間上の保型形式、いわゆるタイヒミュラー保型形式の数論幾何的研究を進めるにあたり、その基礎、及び理論構成のモデルとして上記(3)の理論を用いてきたが、最近発表された上記(4)についての応用を考えるうちに、上記(1)の Katz の結果をジーゲル保型形式に拡張するのに必要な理論的準備が(3)で既になされていることを知り、この方向で本格的な研究を始めるに至った。

## 2. 研究の目的

上でも述べたように、Faltings, Chai によるモジュラー多様体の数論幾何と、Boecherer, 長岡の持ち上げを用いて、ジーゲル保型形式の合同問題を解決し、さらにそれを用いて  $p$  進ジーゲル保型形式の理論と例を構成すること。具体的には、

- (1) 楕円保型形式の合同についての Swinnerton-Dyer, Serre, Katz の結果を拡張し、 $p$  進整数環上の (違う重さを持つ) ジーゲル保型形式のフーリエ展開の和が  $p$  の巾を法として 0 と合同になる条件を求めること。また次数が 2 の環上のジーゲル保型形式について、その環構造を決定することにより、精密な合同条件を与えること。
- (2)  $p$  進楕円保型形式についての Deligne, Katz の結果を拡張し、 $p$  進ジーゲル保型形式の理論の構成、特にそのモジュライ理論的な解釈と応用を与えること。
- (3) Serre によるアイゼンシュタイン級数の

極限による  $p$  進楕円保型形式の構成を拡張し、多変数アイゼンシュタイン級数の極限として  $p$  進ジーゲル保型形式の例を構成すること。

## 3. 研究の方法

本研究は、高次元モジュラー多様体の数論幾何とジーゲル保型形式の数論を関連付けた研究を進めることによって、両者の相互発展に寄与することを目的としており、応募者が中心となって、以下のように研究を行った。

- (1) 連携研究者の宮崎誓氏、寺井直樹氏と共同して、高次元モジュラー多様体やそのコンパクト化についての代数的、数論的性質を研究した。
- (2) 連携研究者の上原健氏と共同して、ジーゲル保型形式の合同、 $p$  進理論を構成した。
- (3) 研究分担者の長岡昇勇氏と共同して、ジーゲル保型形式の合同問題と  $p$  進理論についての研究集会を開催した。
- (4) 他大学・研究機関で行われる数論に関する研究集会について、旅費等の支給を中心とする資金援助を行った。

## 4. 研究成果

- (1) ジーゲルモジュラー多様体の数論幾何的性質を調べた。特に  $p$  が巾零になるような環上のモジュラー多様体において、通常軌跡 (ordinary locus) 上の井草塔 (Igusa tower) の性質を調べ、その純性 (purity) を示した。この結果、 $p$  進モノドロミー理論、及び長岡等によるハッセ不変量の持ち上げについての結果を用いて、ジーゲルモジュラー形式の合同問題を解決し、フーリエ係数が合同となるジーゲル保型形式の重さが合同になることを示した。さらに  $p$  進ジーゲルモジ

ュラー形式の重さが  $p$  進数として定まることを示し、 $p$  進ジーゲルモジュラー形式と井草塔の切断との同一視を与えることにより、ジーゲルモジュラー形式の  $p$  進理論の基礎付けを与えた。またその応用として、レベル付きジーゲルモジュラー形式の  $p$  進性を示した。

- (2) 楯田保型形式における Deligne, Katz, Serre, Swinnerton-Dyer の結果を拡張して、ベクトル値ジーゲルモジュラー形式の数論的理論と、ベクトル値  $p$  進ジーゲル・モジュラー形式の理論の基礎付けを与えた。特に井草塔による表示を用いて、 $p$  進作用素の自然な構成を与えた。
- (3) ジーゲルモジュラー多様体と代数曲線のモジュライ空間の代数幾何的性質、特にマンフォードの同型写像を用いて、環上のジーゲルモジュラー形式のなす環（保型形式環）の構造を調べた。特に 6 を逆元として持つ環上において、次数 2 のジーゲルモジュラー形式のなす環の構造を決定し、複素数体上の場合の井草の結果を拡張した。
- (4) ショットキー一意化されたリーマン面上の次数 0 の半安定ベクトル束が、ショットキー群の線形表現に付随して得られることを示し、ショットキー群の線形表現のモジュライ空間からリーマン面上のベクトル束のモジュライ空間への被覆写像（アーベル・ヤコビ写像の高階版）を研究した。
- (5) モジュラー曲線の基本群の完備化から定まるモチーフの構造を調べ、反復志村積分が通常の志村積分の積で表されることを示した。
- (6) 代数的テータ関数と非アルキメデス的テータ関数の理論を用いることにより、ソリトン方程式方程式 (KP 方程式) の新

しいタイプの解を構成すると共に、ヤコビ多様体の特徴付けに関するショットキー問題について、次の成果を得た。

- ① 代数的テータ関数と非アルキメデス的テータ関数を用いることにより、ソリトン方程式によるヤコビ多様体の特徴付けを与えた。
- ② Trisecant 条件とその接触版を用いて、標数正の体上のヤコビ多様体の特徴付けを与えた。
- (7) 多変数のモジュラー形式のもつ  $p$  進的な性質や  $p$  を法とした性質を調べた。特にエルミート・モジュラー形式の場合に、ある種の合同式を満たすエルミート・モジュラー形式の存在と存在条件を調べた。この結果を用いることにより、 $p$  を法として簡約化したエルミート・モジュラー形式のなす環の構造を、ある場合に決定することができた。
- (8) セールのモジュラー形式の古典的な結果の一つである、レベルが素数  $p$  のモジュラー形式の  $p$  を法とした性質を、多変数モジュラー形式の典型的な例であるジーゲル・モジュラー形式の場合に拡張した。
- (9) ジーゲル・モジュラー形式の典型的な例であるジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に現れるコーエン関数の簡明な表示を得た。これはエルミート・アイゼンシュタイン級数と呼ばれる関数をジーゲル上半空間に制限して得られたものである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Takashi Ichikawa, Vector bundles on a nearly degenerate Riemann surface,

Mathematische Zeitschrift, 査読有,  
印刷中, 2011

- ② T. Kikuta and Shoyu Nagaoka, On Hermitian modular forms mod  $p$ , J. Math. Soc. Japan, 査読有, 63, 2011, 211–238
- ③ S. Boecherer and Shoyu Nagaoka, On Siegel modular forms of level  $p$  and their properties mod  $p$ , manuscripta mathematica, 査読有, 132, 2010, 501–515
- ④ T. Kikuta, Shoyu Nagaoka, Congruence Properties of Hermitian modular forms, Proc. A.M.S., 査読有, 137, 2009, 1179–1184
- ⑤ Takashi Ichikawa, Siegel modular forms of degree 2 over rings, J. Number Theory, 査読有, 129, 2009, 818–823
- ⑥ Takashi Ichikawa, Congruences between Siegel modular forms, Math. Ann., 査読有, 342, 2008, 527–532

[学会発表] (計 3 件)

- ① Takashi Ichikawa, Motivic properties of modular groups, Galois Theoretic Arithmetic Geometry, 2010 年 10 月 22 日, 国際高等研究所
- ② 市川尚志, Noncommutative modular symbols, 野田モジュラー多様体研究集会, 2009 年 12 月 24 日, 東京理科大学
- ③ 市川尚志, Galois action on the nilpotent completions of modular groups, ガロア理論とその周辺 徳島 2008, 2008 年 9 月 11 日, 徳島大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

市川 尚志 (ICHIKAWA TAKASHI)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号：20201923

### (2) 研究分担者

長岡 昇勇 (NAGAOKA SHOUYU)  
近畿大学・理工学部・教授  
研究者番号：20164402

### (3) 連携研究者

上原 健 (UEHARA TSUYOSHI)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号：80093970

### (4) 連携研究者

宮崎 誓 (MIYAZAKI CHIKASHI)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：90229831

### (5) 連携研究者

寺井 直樹 (TERAI NAOKI)  
佐賀大学・文化教育学部・准教授  
研究者番号：90259862