

機関番号：22604

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008年度～2010年度

課題番号：20540020

研究課題名(和文) 多重ディリクレ級数の解析的性質の研究とその数論への応用

研究課題名(英文) Research on analytic properties of multiple Dirichlet series and its application to number theory

研究代表者

津村 博文 (TSUMURA HIROFUMI)

首都大学東京大学院・理工学研究科・教授

研究者番号：20310419

研究成果の概要(和文)：研究代表者は、継続中の名古屋大学の松本耕二教授、立教大学の小森准教授との共同研究を通して、抽象ルート系に付随する多重ゼータ関数の基礎理論を確立した。またこれまで松本氏の以前の研究を深めることで、二重ゼータ関数の関数等式で、Riemannゼータ関数の関数等式の類似とみられるものを証明した。さらに双曲関数を含むようなDirichlet級数のEisenstein型の二重化を構成し、それらの値に関する関係式を求めた。

研究成果の概要(英文)：The research representative established the foundation of the multiple zeta-functions associated with root systems through the joint work with Professors Kohji Matsumoto (Nagoya Univ.) and Yasushi Komori (Rikkyo Univ.). Moreover, based on Matsumoto's previous work, we obtained a functional equation of the double zeta-function which can be regarded as a double analogue of that of Riemann's zeta-function. In addition, he studied double Dirichlet series of Eisenstein type involving hyperbolic functions, and gave some formulas for them at positive integers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成20年度	1,300,000	390,000	1,690,000
平成21年度	1,000,000	300,000	1,300,000
平成22年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論

1. 研究開始当初の背景

(1) 整数論、組合せ理論、表現論、組み紐理論、さらには量子場の理論等の数理論理学の分野にも現われ、現在でも活発に研究が行われている多重ゼータ関数、およびその一般化である多重ディリクレ級数と呼ばれるものの解析的性質に関して、これまでの研究成果も踏まえて研究を行った。

2. 研究の目的

(1) 多重ディリクレ級数の解析的な性質を研究し、特にその自然数における値の間に成り立つ関係式、およびそれらの関数の間に成り立つ関数関係式を調べることを目的とした。

(2) これらの研究から、数論への応用、とくに多重ディリクレ級数の p 進的な性質を調べて、円分体の数論的側面の研究への応用を目的とした。

3. 研究の方法

(1) それまで知られていた反復積分による研究方法とは異なり、母関数と一様収束級数の理論を使って、多重ディリクレ級数の自明な零点を利用することで、新たな関係式を導出した。

(2) 多重ディリクレ級数の p 進的な性質を、その負の整数値を補間する p 進積分を使って p 進解析関数を構成することで調べた。

4. 研究成果

(1) 以前から継続的に研究を続けている、抽象ルート系に付随する多重ゼータ関数の基礎理論を、松本耕二氏、小森靖氏との共同研究によって確立した。これは Witten の数理論理の研究を含むもので、Zagier によって定式化された萌芽的な研究の発展結果とみられる。

(2) 松本氏の以前の研究を深めることで、二重ゼータ関数の関数等式で、Riemann ゼータ関数の関数等式の類似とみられるものを証明した。さらにその Dirichlet 指標付きの L -類似を証明した。これは Dirichlet L 関数の関数等式の二重化とみられる。

(3) 双曲関数を含むような Dirichlet 級数の Eisenstein 型の二重化を構成し、それらの値に関する関係式を求めた。特別な場合として Hurwitz の公式と呼ばれるものを一般化した。これらは Cauchy や Mellin などの古典的な関係式の多重化ともみられる。

(4) 組み合わせ論で重要な役割を果たしている Bell 数、Stirling 数を補間するような多重ディリクレ級数を構成した。さらにそれらの満たす関数関係式を証明した。

(5) 多重ゼータ値のシャッフル積と呼ばれる概念が、ルート系のゼータ関数の部分分数分解として解釈することができた。これらを連続的に補間する解析的な関係式を証明した。

(6) Essouabri 氏(フランス・St Etienne 大学教授)および松本氏との共同研究で、ベクトル値のゼータ関数の解析的性質を調べた。応用として、多重ゼータ値に関して証明されている和公式の一部をベクトル値ゼータ関数に拡張した。

(7) 二重 L 関数の p 進類似に対応する p 進解析関数を、 p 進積分の理論を使って構成した。これは円分体の研究で重要な Kubota-

Leopoldt p 進 L 関数のある種の拡張に対応している。実際、奇指標に対応する Kubota-Leopoldt p 進 L 関数は消えるが、この p 進解析関数は、偶指標では Kubota-Leopoldt p 進 L 関数と一致して、奇指標についても消えずに情報を与える

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

[1] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras IV, Glasgow Math. J. 53 (2011), 185-206 (査読あり).

[2] D. Essouabri, K. Matsumoto and H. Tsumura, Multiple zeta-functions associated with linear recurrence sequences and the vectorial sum formula, Canad. J. Math. 63 (2011), 241-276 (査読あり).

[3] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of root systems, in 'Number Theory: Dreaming in Dreams - Proceedings of the 5th China-Japan Seminar', T. Aoki, S. Kanemitsu and J. -Y. Liu (eds.), World Sci. Publ., 2010, pp. 135-183 (査読あり).

[4] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On multiple Bernoulli polynomials and multiple L -functions of root systems, Proc. London Math. Soc. 100 (2010), 303-347 (査読あり).

[5] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, An introduction to the theory of zeta-functions of root systems, in 'Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L -functions', MSJ Memoirs vol. 21, Math. Soc. Japan, 2010, pp. 115-140 (査読あり).

[6] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras II, J. Math. Soc. Japan 62 (2010), 355-394 (査読あり).

[7] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations and functional relations for Euler double

zeta-function and its generalization of Eisenstein type, Publ. Math. Debrecen 77 (2010), 15-31 (査読あり).

[8] H. Tsumura, Multiple Dirichlet series interpolating Bell numbers and Stirling numbers, Rocky Mountain J. Math. 40 (2010), 1051-1060 (査読あり).

[9] H. Tsumura, Analogues of the Hurwitz formulas for level 2 Eisenstein series, Results in Math. 58 (2010), 365-378 (査読あり).

[10] H. Tsumura, On alternating analogues of Tornheim's double series II, Ramanujan J. 18 (2009), 81-90 (査読あり).

[11] H. Tsumura, Evaluation of certain classes of Eisenstein's type series, Bull. Austral. Math. Soc. 79 (2009), 239-247.

[12] K. Matsumoto and H. Tsumura, A new method of producing functional relations among multiple zeta-functions, Quart. J. Math. (Oxford) 59 (2008), 55-83 (査読あり).

[13] K. Matsumoto, T. Nakamura, H. Ochiai and H. Tsumura, On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions, Acta Arith. 132 (2008), 99-125 (査読あり).

[14] H. Tsumura, On certain analogues of Eisenstein series and their evaluation formulas of Hurwitz type, Bull. London Math. Soc. 40 (2008), 85-93 (査読あり).

[15] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Zeta and L-functions and Bernoulli polynomials of root systems, Proc. Japan Acad., Ser. A 84 (2008), 57-62 (査読あり).

[16] H. Tsumura, On multiple analogues of Ramanujan's formulas for certain Dirichlet series, J. Théor. Nombres Bordeaux 20 (2008), 219-226 (査読あり).

[17] K. Matsumoto, T. Nakamura and H. Tsumura, Functional relations and special values of Mordell-Tornheim triple zeta and L- functions, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2135-2145 (査読あり).

[18] K. Matsumoto and H. Tsumura,

Functional relations among certain double polylogarithms and their character analogues, Siauliai Math. Semin. 3(11) (2008), 189-205 (査読あり).

[19] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, to appear in Math. Zeitschrift (査読あり).

[20] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, to appear in Internat. J. Number Theory (査読あり).

[学会発表] (計 5 件)

1. ``Certain multiple series related to the Barnes multiple zeta-functions'',

French-Japanese Workshop on zeta functions III:~Methods of meromorphic continuations, study of zeros and special values and applications, Saint-Etienne 大学 (フランス), 2009 年 11 月

2. ``ルート系のゼータ関数と多重ゼータ値'', RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 9 月

3. ``Certain double series of Euler type and f Eisenstein type and Hurwitz numbers'', RIMS 研究集会「解析的整数論の新しい展開」, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 10 月

4. ``Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems'', 日本数学会代数学分科会, 東京大学, 2009 年 3 月

5. ``Multiple zeta-functions associated with linear recurrence sequences and the vectorial sum formula'', 日本数学会代数学分科会, 東京大学, 2009 年 3 月

[図書] (計 1 件)

1. ``Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions'', MSJ Memoirs, vol. 21, G. Bhowmik, K. Matsumoto and H. Tsumura (eds.), Mathematical Society of Japan, 2010.

[その他] ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/math-tsumura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

津村 博文 (TSUMURA, HIROFUMI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：20310419

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

松本 耕二 (MATSUMOTO, KOHJI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60192754