

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 24 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20540021

研究課題名（和文） 関数等式を満たす空間の分類と表現論的、解析的考察

研究課題名（英文） Classification and representation theoretic study of the functional equation-spaces.

研究代表者 小木曾岳義 (KOGISO TAKEYOSHI)

城西大学・理学部・准教授

研究者番号：20282296

研究成果の概要（和文）：

C_p, C_q をそれぞれ p, q 変数の正定値 2 次形式の Clifford 代数とし、 C_p, C_q のテンソル積の代数の表現 ρ から、局所関数等式：

$$|P|^s \text{ の Fourier 変換} = (\text{ガンマ因子}) \times |P*|^{-m/4 - s} \quad (m = \text{the degree of } \rho)$$

を満たす 4 次形式 $P, P*$ のペアを得ることができた。「概均質ベクトル空間の基本定理」により、正則概均質ベクトル空間の相対不変式とその双対空間の相対不変式のペアは局所関数等式を満たすことが知られているが、上記の方法で構成した 4 次形式 P は殆どの場合、概均質ベクトル空間の相対不変式になっておらず、局所関数等式を満たす多項式の新しい構成法と言える。この研究ではこのような P が住む空間を全て分類し、明示的にリストアップし、どのような代数構造を持っているかをまとめた結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

Let C_p (resp. C_q) be the Clifford algebra of a positive definite real quadratic form in p (resp. q) variables. For a representation ρ of the tensor product of C_p and C_q , we can associate a homogeneous polynomial P of degree 4 on the representation space of ρ having the property “The Fourier transform of the complex power $|P|^s$ coincides with $|P*|^{-m/4 - s}$ ($m = \text{the degree of } \rho$) with an explicit gamma factor. Owing to the theory of prehomogeneous vector spaces, the basic relative invariant of an irreducible regular prehomogeneous vector space satisfies the property above. However the polynomials P are not necessarily relative invariants of any prehomogeneous vector spaces. The polynomials P are relative invariants of prehomogeneous vector spaces only for quite few exceptional cases. In this study, we discuss the structure and the action of the group of linear transformations that leave P invariant.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学一般、表現論

1. 研究開始当初の背景

多項式 P, P^* のペアが局所関数等式を満たすとき、そこから大域ゼータ関数の関数等式や線形偏微分方程式の基本解が得られるなど、整数論的、解析的な重要な意味を持つ。例えば、古典的に知られている結果としては、 P, P^* を正方行列の行列式とした場合、その局所関数等式のガンマ因子から Riemann ゼータ関数をシフトして積をとった大域ゼータ関数の関数等式に現れるガンマ因子を与える。また P, P^* を正定値 2 次形式とした場合、その局所関数等式のガンマ因子から大域ゼータ関数である Epstein ゼータ関数の関数等式に現れるガンマ因子を与える。このような局所関数等式を満たす多項式のペアを系統的に構成する方法として、佐藤幹夫氏が概均質ベクトル空間の概念を導入し、正則概均質ベクトル空間の相対不変式とその双対空間の相対不変式のペアは局所関数等式を満たすことを示した。

2. 研究の目的

正則概均質ベクトル空間の相対不変式とその双対空間の相対不変式のペアは局所関数等式をみたすことが知られているが、それ以外に局所関数等式を満たすような多項式がどのくらいあるのか、またその多項式が住む空間とはどのような空間かを明らかにし、非概均質ベクトル空間の相対不変式であるにも関わらず、局所関数等式を満たす多項式が豊富にあることを示す。

3. 研究の方法

局所関数等式を満たすような多項式のペア P, P^* がそれぞれ住む空間 V, V^* に線型空間 W, W^* から落ちる双対かつ非退化な 2 次写像 Q, Q^* のペアがあるとき、合成多項式 $P(Q(w)), P^*(Q^*(w^*))$ もまた局所関数等式を満たし、そのガンマ因子が P, P^* の局所関数等式のガンマ因子で書けるといって 2007 年に佐藤文広氏によって発表された「関数等式の遺伝定理」(局所関数等式の 2 次写像による引き戻し) という結果がある。この局所関数等式の引き戻し定理を用いて、双対性かつ非退化性を満たすような 2 次写像の研究をした。特に、符号数 (p, q) の 2 次形式を相対不変式とするような空間への双対性かつ非退化性を満たすような 2 次写像の研究を佐藤文広氏とともに起こした。

4. 研究成果

以下の研究を立教大学の佐藤文広氏と共に行った。局所関数等式を満たすような多項式のペアを、正定値 Clifford 代数 C_p, C_q のテンソル積の表現 ρ (その基底対称行列を S_1, \dots, S_{p+q} とする) から構成し、 (p, q) をいろいろ動かした場合の、当該の多項式の不変

Lie 環の計算を大量に行い、これらのクラスの分類、特徴付けに関する予想をし、その予想が正しいことを証明した。このことをもう少し詳しく述べると、①上記の「研究方法」で説明した 4 次形式 $P \circ Q, P^* \circ Q^*$ のペアが満たす局所関数等式を明示的に与えた。②4 次形式 $P \circ Q$ の不変 Lie 群 $G_{p, q}(\rho)$ の形は、 $p+q$ が 4 以下の場合や、 $p+q$ が 5 以上 11 以下の場合の低次元表現の場合を除いて、 $G_{p, q}(\rho) = H_{p, q} \times \text{Spin}(p, q)$, $\text{Lie}(H_{p, q}) = \{X \in \mathfrak{m}(\mathfrak{m}, \mathbb{R}) \mid tX \text{ Si} + S_i X = 0 \text{ (} i=1, \dots, p+q \text{)}\}$ という形をしていることを証明した。③上記の結果②の $\text{Lie}(H_{p, q})$ に関して、ペアの変換

$(p, q) \mapsto (q, p), (p+8, q), (p, q+8), (p+4, q+4)$ などの、 (p, q) についての対称性、周期性を証明 $\text{Lie}(H_{p, q})$ の基本領域が 13 個の reductive Lie 環からなることを明らかにし、その 13 個の Lie 環を明示的に与えた。またその 13 個の基本領域は小林俊行氏と吉野太郎氏が研究している Clifford-Klein 形式のあるクラスと reductive dual pair になるのではないかという予想が落合啓之氏により、与えられ、その問題に取り組み、部分的な成果が得られた。④当該の 4 次形式が住む空間が、いつ概均質ベクトルになるのか、非概均質ベクトル空間になるのかを特定しリストアップした。⑤この研究の先行研究として、Faraut と Koranyi による Euclidean Jordan algebra の対称行列の空間への表現から得られる局所関数等式を満たす多項式のペアの構成があり、特に単純な 5 つの Euclidean Jordan algebra $\text{Sym}(n, \mathbb{R}), \text{Herm}(n, \mathbb{C}), \text{Herm}(n, \mathbb{C}), \text{H}_3(0)$, rank2 のケースのうち、例外型といわれる $\text{H}_3(0)$ 以外について、その表現から局所関数等式を満たす多項式のペアを具体的に構成し、 $\text{Sym}(n, \mathbb{R}), \text{Herm}(n, \mathbb{C}), \text{Herm}(n, \mathbb{C})$ から得られるものは概均質ベクトル空間の相対不変式であるが、rank2 のケースから得られるものは変数の数が十分大きいとき非概均質ベクトル空間の相対不変式であると思われるという予想を、我々の言葉で言い直し解釈しなおすことで、再確認と、その Farout と Koranyi の予想が変数の個数が 4 以上で成立することを示した。因みに Farout と Koranyi のランク 2 のケースは我々の $(p, q) = (1, n-1)$ の場合に相当していることも分かった。⑥結果②の例外となるクラスは当該の 4 次形式が恒等的に 0 になるか、2 次形式の積になる場合であるが、こういう場合は 2 次球写像、Hopf 写像というトポロジカルな写像と関係があり、その観点からの研究のアプローチも行い、いくらかの成果が得られた。特に、広義 Hurwitz 問題との関連でいくつかの結果を得ることが出来た。⑦局所関数等式の 2 次写像による遺伝定理を、下の空間が符合数 (p, q) の 2 次形式を相対不変に持つ

ような正則概均質ベクトル空間の場合に研究したのが上記の研究であるが、下の空間を他の正則概均質ベクトル空間に変えた場合についてどうなるか、特に自己双対な2次写像が存在するか否かについて、いくつかの例について調べ結果を得た。これについてはその続きを継続的に研究中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① T. Kimura , T. Kogiso , Y. Kurosawa and M. Ouchi,
Prehomogeneous vector spaces and their regularity.
to appear in Josai mathematical monograph, 査読有, vol.5, 2012.
- ② T. Kimura , T. Kogiso and M. Ouchi,
A classification of some prehomogeneous vector spaces related with hypergeometric functions.
to appear in Josai mathematical monograph, 査読有, vol.5, 2012.
- ③ F. Sato and T. Kogiso,
Construction of non-prehomogeneous polynomials with local functional equations from representations of Clifford algebras.
to appear in Vestnik Tambov University, 査読無, 2(106), 2012, 1744-1750.
- ④ F. Sato and T. Kogiso,
Representation of Clifford Algebras and local functional equations.
to appear in RIMS-Kokyuroku-Bessatsu, 査読有.
- ⑤ T. Kogiso,
Fourier transforms of polynomials and prehomogeneous vector spaces, to appear in proceeding of NACA2011, 査読有.
- ⑥ F. Sato and T. Kogiso,
Representation of Clifford algebras and quartic polynomials with local functional equations, RIMS Kokyuroku, 査読無, 1617 (2008), 51--62.

[学会発表] (計 20 件)

- ① 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から

得られる局所関数等式について」日本数学会年会関数解析分科会特別講演、東京理科大学理学部, 2012年3月28日

- ② 小木曾岳義、「2次写像についてのある考察」、概均質ベクトル空間研究集会、つくば国際会議場小会議室 401, 2012年1月28日
- ③ 小木曾岳義、「Representation of Clifford algebras and local functional equation」表現論ワークショップ、鳥取市ふれあい市民会館講義室, 2011年12月26日
- ④ 小木曾岳義、「Fourier transforms of polynomials and Prehomogeneous vector spaces」, 2nd Nonlinear Analysis and Convex Analysis International Conference, Pusan Korea 2011年8月3日
- ⑤ 小木曾岳義、「広義 Hurwitz 問題と概均質ベクトル空間」つくば国際会議場小会議室 403, : 研究集会「概均質ベクトル空間の分類とその応用」, 2011年2月5日
- ⑥ 小木曾岳義、「Hopf mappings and functional equations of the Fourier transforms of polynomials」城西大学理学部 1-410, Workshop of Teichmuller Spaces and related topics, 2011年1月20日
- ⑦ 小木曾岳義、「Representations of Clifford Algebras and local functional equations」東北大学理学部川井ホール, 研究集会「仙台整数論研究集会」, 2010年10月9日
- ⑧ 小木曾岳義、「局所関数等式をみたす多項式について」筑波大学数学系棟 D 棟 講義室 D509, 研究集会「多学問分野研究集会」, 2010年6月29日
- ⑨ 小木曾岳義、「非概均質関数等式の Hopf 写像からのある考察」九州大学伊都キャンパス大学院理学府数学科中セミナー室 6, 研究集会「概均質ベクトル空間論の最近の発展」, 2009年12月23日
- ⑩ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から得られる非概均質的関数等式について」東京理科大学理工学部数学科セミナー室, 東京理科大学理工学部数学科談話会, 2009年11月26日

- ⑪ 小木曾岳義、「Hopf 写像と概均質ベクトル空間について」つくば国際会議場小会議室 403, 研究集会「簡約可能概均質ベクトル空間の分類理論」, 2009 年 11 月 21 日
- ⑫ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から得られる非概均質的関数等式について」東北大学理学部合同棟 801 号室, 東北大学整数論セミナー, 2009 年 10 月 5 日
- ⑬ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から得られる局所関数等式を満たす多項式について」大阪大学豊中キャンパス, 日本数学会秋季会関数解析分科会, 2009 年 9 月 27 日
- ⑭ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から得られる局所関数等式を満たす多項式とそれに付随する空間の分類について」, 筑波大学数学系 D814 教室, 小研究集会@つくば, 2009 年 7 月 7 日
- ⑮ 佐藤文広、小木曾岳義、
“Representations of Clifford Algebras and local functional equations” RIMS 研究集会「群の表現と非可換調和解析の新展開」, 京都大学数理解析研究所 402 号室, 2009 年 6 月 2 日
- ⑯ 小木曾岳義、 “Representations of Clifford Algebras and local functional equations” 東京大学数理科学研究科, 表現論セミナー, 2009 年 5 月 28 日
- ⑰ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現から得られる概均質ベクトル空間について」つくば国際会議場小会議室 403, 研究集会「簡約可能概均質ベクトル空間の分類理論」, 2008 年 11 月 29 日
- ⑱ 小木曾岳義、「2 次写像から来る非概均質的関数等式」, 愛媛大学理学部 2 号館 204 教室, ワークショップ「概均質ベクトル空間の課題」, 2008 年 9 月 11 日
- ⑲ 佐藤文広、小木曾岳義、
“Representations of Clifford algebras and quartic polynomials with local functional equations”, 東京大学玉原セミナーハウス, 「JSPS-RFBR 日露ワークショップ Harmonic Analysis on Homogeneous Space and Quantization」, 2008 年 8 月 25 日
- ⑳ 小木曾岳義、「Clifford 代数の表現か

ら得られる関数等式を満たす多項式について」東京大学数理科学研究科, Lie 群論・表現論セミナー, 2008 年 7 月 29 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小木曾 岳義 (KOGISO TAKEYOSHI)
城西大学・理学部・准教授
研究者番号: 20282296

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

佐藤 文広 (SATO FUMIHIRO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号: 20120884