

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月30日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540025

研究課題名（和文） 数論多様体の数論コホモロジーによる研究

研究課題名（英文） Study on arithmetic geometry by arithmetic cohomology

研究代表者

中島 幸喜 (NAKAJIMA YUKIYOSHI)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：80287440

研究成果の概要（和文）：数論と幾何の融合である数論幾何という分野の中に、 p 進コホモロジーという研究対象があるが、その p 進コホモロジーにおいて、対数収束トポスの基礎理論の構築、対数収束重みフィルトレーションに関する様々な性質を証明した。また、円盤の類似である混標数離散付置体上の任意の特異点を持つ固有多様体の p 進重み系列の構成とその基本性質を解明した。

研究成果の概要（英文）：In arithmetic geometry(=the conjunction of arithmetic and geometry), there is a theory of p -adic cohomology. For this theory, we have constructed a fundamental theory of logarithmic convergent topoi and proved various properties of logarithmic weight filtration. We have also constructed the p -adic weight spectral sequences of proper varieties with any singularities over the fraction field of a complete discrete valuation ring of mixed characteristics and proved the fundamental properties of it.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：数論幾何

1. 研究開始当初の背景

(1) 数論幾何においては、Weil予想を解くためのエタールコホモロジーを導入するために、60年代にフランス高等研究所のAlexandre Grothendieck教授によって創始されたトポスの理論があり、その重要な例として、Rennes大学のPierre Berthelot教授によって、 p 進コホモロジーの研究のため導入されたクリスタルトポスの概念があった。

(2) 一方、90年代にパリ南大学のJean Marc Fontaine教授とLuc Illusie教授によって、発見され、シカゴ大の加藤和也教授によって、整備された対数幾何の概念があった。この概念はある種の特異点を持つ多様体(対数的に滑らかな特異点)を扱うのに非常に役立っていた。

(3) さらに、様々な研究者、例えば、Pierre Berthelot 教授による篩導来圏(よく知られた導来圏の篩つき圏)の強力な一般理論があった。

以上、(1), (2), (3)が大きな理論の背景であった。以下、各論の背景に移る。

(4) 東京大学の志甫淳教授と共同で正標数の族上の開多様体の重み系列をクリスタルトポスと対数幾何の概念と篩導来圏を使った基礎理論を作っていた。

(5) パリ北大学の Abraham Mokrane 教授によって、正標数の完全体上の固有正規対数多様体の p 進重み系列がつくられていた。

(6) Grothendieck 教授が 1 進純粋性が大問題だと認識して以来、長らく未解決問題であったが、10 数年前にフランス高等研究所の Ofer Gabber 教授によって、 1 進純粋性が示されていた。

(7) Rennes 大学の Jean Yves Etesse 教授によって、クリスタル層係数の de Rham-Witt 複体の理論が作られていて、その de Rham-Witt 複体とクリスタルコホモロジーの比較定理が証明されていた。

(8) 東北大学の都築暢夫教授と Padova 大学の Bruno Chiarellotto 教授によって、標数 p の曲線の局所化上の固有狭半安定多様体に対し、 p 進 Clemens-Schimid 完全系列が構成されていた。また、Padova 大学の Valentina Di Proietto 教授らによって、 p 進 Clemens-Schimid 系列の層係数版が次元 1 の多様体のみについて、構成されていた。

(9) 京都大学の伊藤哲史教授によって、正標数の完備離散付置環上の固有半安定型族の 1 進モノドロミー重み予想を証明されていた。

2. 研究の目的

(1) 1. (4)の理論の類似として、1. (1), (2), (3)の大理論を大きな支柱として、開多様体に対し、収束トポスを使った基礎理論を作ることを目指した。この類似理論では以前の理論と違った注目すべき目的として、1. (6)の 1 進純粋性の p 進類似である p 進純粋性を証明することを目指した。

(2) 再び、1. (1), (2), (3)の大理論を大きな支柱として、1. (5)の理論の拡張として、勝手な特異点を持つ固有多様体の p 進重み系列を構成し、さらに、コンパクト台付き無限小コホモロジーに収束する p 進重み系列を構成し、コンパクト台付き無限小コホモロジーに重み篩を構成することを目指した。

3. 研究の方法

上記 2. (1), (2)ともクリスタルトポス(あるいは収束トポス)と対数幾何の手法と篩導来圏を研究対象となる多様体に適切な状況設定をして、枠組みを作り、 p 進純粋性を証明し、 p 進重み系列を構成した。どちらの研究においても、多様体の(超)被覆と埋め込み系を具体的に作ることがポイントとなり、その埋め込み系に体する対数的 de Rham 複体を具体的に書き下す必要がある。さらに、2. (2)では Princeton 大学教授の Pierre Deligne によって作られたコホモロジー降下の方法と Harvard 大学教授の de Jong の alteration に関する結果を使って、任意の特異点を持つ固有特異多様体を単体的半安定型多様体の底辺間に置き換えて、最後に加藤和也教授と兵藤治教授の切除単体的版である対数的クリスタルコホモロジーと対数的 de Rham コホモロジーを比較する東京大学の辻雄教授の結果を使って、 p 進重み篩を構成した。

4. 研究成果

(1) 以前に志甫淳教授と共同で Berthelot 教授の篩導来圏の一般理論の重要性に気づいていた。この理論を正標数の族上の開多様体の収束重み篩複体の構成に使い、その複体の構成に成功し、結果として、収束重み系列の構成に成功した。また、収束重み複体の構成の副産物として、 p 進純粋性を証明した。

(2) 以前に志甫淳教授と共同でクリスタル重み篩複体を構成していた。本研究では、収束重み篩複体の Zariski トポスに導来純像を取った篩複体とクリスタル重み篩複体を Zariski トポスに導来純像を取った篩複体が同型であるという比較定理を証明した。その系として、収束重み篩複体の底変換定理、収束重み篩複体のキュネス公式、収束重み篩複体の双対定理をクリスタル重み篩複体の対応する定理に帰着することによって、示した。

(3) Mokrane 教授に構成されていた、正標数の完全体上の固有正規対数多様体の p 進重み系列を PD イデアルを持つ勝手な p 進対数ポイントの族上の固有正規対数多様体の p 進重

み系列の構成に成功し、Mokrane 教授の結果を拡張した。

(4) (3)の結果を固有正規対数多様体の底変換に対しても拡張し、さらに進んで、切除単体的固有正規対数多様体の底変換の p 進重み系列を構成し、コホモロジー降下の方法を使って、混標数完備離散附置体上の固有多様体の無限小コホモロジーの重み篩を構成し、途中に構成した、埋め込み系の取り方に依らないことを示した。

(5) 1 (7)の Jean Yves Etesse 教授の理論を対数多様体に拡張した。

(6) Mokrane 教授が構成した p 進重み篩複体をクリスタル係数版に拡張した。また、(3)の p 進重み系列の構成に必要な p 進重み篩複体をクリスタル係数版に拡張し、両者の拡張された篩複体の比較定理を証明した。

(7) 1. (8)を次の意味で大幅に拡張した。
(a) 多様体を対数的点上の多様体に、しかも底対数的スキームを対数的点の族の場合に
(b) 係数を自明でないクリスタルの場合に
(c) 多様体の次元は任意次元に
また、手法は 1. (8)の研究方法とは異なり、4. (2)で作った、クリスタル重み篩複体の構成の帰結として、自然にしかも簡単に 1. (8)の結果を拡張した。さらに、こうして拡張した p 進 Clemens-Schimid 系列の狭完全性も示し、都築教授と Chiarellotto 教授の予想を証明した。

(8) 正標数の完備離散付置環上の固有半安定型族の p 進モノドロミー重み予想を証明した。応用として、混標数の完備離散付置環上の固有半安定型族の特殊ファイバーが正標数の完備離散付置環上の固有半安定型族に持ち上がる時、 p 進モノドロミー重み予想が成立することを示した。

(9) 正標数の対数的点上の固有正規交差対数多様体が混標数完備離散付置環上の固有正規交差対数多様体に持ち上がる場合に、斉藤盛彦教授のホッジ理論の結果を使用することによって、 p 進モノドロミー重み予想と p 進強 Lefschetz 同型を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① 中島幸喜、Weight filtration and slope filtration on the rigid cohomology of a variety in characteristic $p > 0$ 、Memoire de la Societe Mathematique de France、査読有、掲載決定
- ② 中島幸喜、書評 Bernard Le Stum: Rigid Cohomology、雑誌数学、査読有、2012、97-101

[学会発表] (計 6 件)

- ① 中島幸喜、Weight filtration on the log crystalline cohomology of a semistable scheme and weight filtration on the infinitesimal cohomology of a proper scheme、 p -adic cohomology and its applications to arithmetic geometry、2012年11月29日、東北大学
- ② 中島幸喜、Weight filtration on the infinitesimal cohomology in mixed characteristics、ホッジ理論と代数幾何学、2012年2月23日、東京電機大学
- ③ 中島幸喜、Weight filtration on the log crystalline cohomology of a semistable scheme and weight filtration on the infinitesimal cohomology of a proper scheme II、北海道大学数論幾何学セミナー、2012年2月23日、北海道大学
- ④ 中島幸喜、Weight filtration on the log crystalline cohomology of a semistable scheme and weight filtration on the infinitesimal cohomology of a proper scheme I、北海道大学数論幾何学セミナー、2012年2月22日、北海道大学
- ⑤ 中島幸喜、Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of split truncated semistable varieties、Mathematique du CNRS、2010年6月24日、ボルドー大学
- ⑥ 中島幸喜、Comparison theorem between truncated split cosimplicial weight-filtered crystalline complexes and log de Rham-Witt complexes、 p -adic method and its applications in arithmetic geometry at Sendai、2008年11月6日、東北大学

[図書] (計 1 件)

- ① 中島幸喜、志甫淳、Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties、Springer-Verlag、査読有、Lecture Notes

in Mathematics 1959、2008、1-282

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中島 幸喜 (NAKAJIMA YUKIYOSHI)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号 : 80287440 :