様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 20 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：２０５４００２８
研究課題名（和文）　概均質ベクトル空間のゼータ関数の研究

研究課題名（英文）　Researches on zeta functions of prehomogeneous vector spaces

研究代表者
佐藤　文広（SATO FUMIHIRO）
立教大学・理学部・教授
研究者番号：２０１２０８８４

研究成果の概要（和文）：この研究では、代数群の不変式からゼータ関数を組織的に構成する概均質ベクトル空間の理論を、(1)Eisenstein 級数の周期との関係、(2)概均質ベクトル空間のゼータ関数を保型形式の Koecher-Maass ゼータ関数との関係、(3)概均質性のない群作用の不変式の場合へのゼータ関数の拡張、という 3 つの視点から研究した。最も重要な成果は、非退化二次写像を利用し、関数等式を満たす非概均質的な 4 次形式のゼータ関数を構成したことである。

研究成果の概要（英文）：Theory of prehomogeneous vector spaces gives a systematic method of constructing zeta functions from polynomial invariants of prehomogeneous group actions. We investigated zeta functions of prehomogeneous vector spaces from the following 3 view points: (1) relations to Eisenstein-periods, (2) relations to the Koecher-Maass zeta functions of automorphic forms, (3) zeta functions of invariants of non-prehomogeneous group-actions. The most important result is the construction of zeta functions of non-degenerate quadratic mappings, which include zeta functions of certain non-prehomogeneous polynomials of degree 4.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：代数群の整数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論

１．研究開始当初の背景

概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論は、関数等式を満たすディリクレ級数を群の線形表現の不変式から組織的に構成する方法として、1960 年代に佐藤幹夫により構想され、1970 年代に新谷卓郎等の研究により実質的な発展を開始した。今日では、（もちろん、いくつかの重要な問題は残しつつも）理論の創成期に構想された目標にほぼ到達したということができる。このような認識に基づいて、本研究では、概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論の次の発展段階としてどのような方向を目指すかを検討することを大きな意味での課題とした。検討の方向としては、以下の 2 つの方向を想定した。(1) 概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論は、その出発点においてテータ級数の変換公式に基づく古典的なゼータ関数の関数等式証明の成立

根拠を、保型形式論とは異なり、十分大きな群の不変式が局所関数等式を満たすことに見ている。その意味で、保型形式の理論のとは、別の方向への発展と考えてよい。しかしながら、理論が一定の完結を見た現段階で、あらためて、保型形式に付随するゼータ関数の理論との関係を問い直すことの意味は大きいと考えられる。(2)Faraut, Koranyi, Achab, Clerc 等の 1990 年代の研究により、概均質ベクトル空間の理論の主結果の完全な類似が成立するにもかかわらず、概均質ベクトル空間の理論の枠内に収まらない４次形式の例が発見されており、概均質ベクトル空間という概念がゼータ関数論の最終的な枠組みを与えるものとは必ずしも考えられないことが分かっていた。概均質ベクトル空間の枠から出て、どこまでゼータ関数論を拡張できるのか、これがもう一つの研究の方向となる。

２．研究の目的

前項に記したような理論の発展段階の認識に基づいて、本研究では、具体的な研究目的として、次の３つを掲げた。

(1)概均質ベクトル空間のゼータ関数とアイゼンシュタイン級数の周期との関係を明らかにすること。

(2)概均質ベクトル空間のゼータ関数を保型形式に（何らかの意味で）付随するゼータ関数と関係付けること。

(3)Faraut-Koranyi-Achab-Clerc の結果を一般化した非退化二次写像の枠組みで局所関数等式の引き戻しの理論が構築されている（研究代表者）が、その中で、関数等式を満たし非概均質的な局所ゼータ関数を与えるケースを分類すること、また、対応する大域的ゼータ関数の関数等式の理論を構成すること。

３．研究の方法

３つの研究目的のそれぞれを、研究代表者および連携研究者（研究目的(1)については谷口隆、(2)については広中由美子、(3)については小木曽岳義）で担当し、研究を進めた。また、2008,2009 年度は、研究会（愛媛大学理学部（2008, 9/9-12)、九州大学数理学研究科（2009, 12/23-25)）を開催し、研究代表者に連携研究者・研究協力者を加えて、研究の進捗について議論を行った。研究目的の(3)では、構成されたゼータ関数が非概均質的なものか否かを判定するために、二次写像を不変にする群のリー代数を決定する必要があるが、リー代数の数式処理による大規模な具体的な計算が最終結果の予想に非常に有効であった。

４．研究成果

研究期間内に明らかになった成果、および、今後の課題を、研究目的(1), (2), (3)のそれぞれについて述べる。

(1)概均質ベクトル空間のゼータ関数は、極めて弱い条件の下で、一般線形群のアイゼンシュタイン級数の generic な軌道に対応する部分級数の周期に現れることを示した。その際、比例定数には、ある種の球関数の特殊値が非自明因子として含まれる。特に、**Q**-anisotropic な場合には、群の有理点はすべて generic な軌道に含まれ、アイゼンシュタイン級数の周期と概均質ベクトル空間のゼータ関数の関係が（球関数の計算を除けば）完全に明らかになる。そのもっとも基本的な例は、Hecke の量指標の L 関数をエプシュタインのゼータ関数のフーリエ係数として表す、Hecke-Siegel（2 次体の場合)、および、Oda-Hiroe（一般の代数体の場合）の結果であり、この結果を上記の一般的な結果の特殊ケースとして、球関数の明示的計算を含めて再構成する作業は田村敬太（立教大学大学院理学研究科、研究協力者）が行った。**Q**-isotropic な場合には、アイゼンシュタイン級数の周期を正則化し、正則化された周期の値が generic な軌道に対応する部分級数の周期と一致することを示す必要がある。この場合の研究は、現在進行中である。

(2)①既約正則概均質ベクトル空間は佐藤幹夫・木村達雄によって２９のタイプに分類されている。保型形式との関係が古典的に知られている場合はタイプ１、タイプ 15 であり、タイプ１のとき、一般線形群の標準Ｌ関数（保型形式として定数関数をとる)、タイプ 15 のとき、二次形式のテータ級数の Koecher-Maass ゼータ関数となっている。さらに研究代表者の先行する研究においてタイプ１、3 の場合、作用する群を一般線形群の直積からその放物型部分群に制限して得られる多変数ゼータ関数は、一般線形群のアイゼンシュタイン級数に対する標準Ｌ関数と一致すること、タイプ 13、15 の場合、作用する群の $Sp(n)$ または $SO(2n)$ の部分を Siegel 型の放物型部分群に制限して得られる 2 変数ゼータ関数は、それぞれ、$SO(n,n)$、$Sp(n)$ のアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass ゼータ関数に一致することが明らかになっていた。今回の研究では、可約な概均質ベクトル空間（$SL(m)\times GL(n)\times GL(n), \mathrm{M}(m,n)\oplus\mathrm{M}(m,n)$）の split form と non split form について調べ、そのゼータ関数が、それぞれ、$GL(2n)$、$U(n,n)$ のアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass ゼータ関数と同定できることが分かった。連携研究者広中は、p-進対称空間 $U(n,n)/(U(n)\times U(n))$ の球関数論を展開し Hermitian Siegel 級数を球関数の一次結合として表す公式を得ている。その際、Hermitian Siegel 級数の積分

表示がカギとなるが、この積分表示が non split form の場合にゼータ関数を Koecher-Maass ゼータ関数と同定する際にも利用できた。いわゆる系列型（古典型）の概均質ベクトル空間のうちで、タイプ2以外については、作用する群が GL(n) の場合には標準L関数、その他の場合には適当な群のアイゼンシュタイン級数の Koecher-Maass ゼータ関数として解釈されることが分かった。タイプ 2 については、$GL(n)$の 2 重被覆のアイゼンシュタイン級数と関連すると予想される。その他のいわゆる散在的な概均質ベクトル空間については、保型形式とのつながりは明らかになっていない。保型形式と概均質ベクトル空間のゼータ関数の関連という問題は、最終的には、周期積分の非消滅と保型形式の持ち上げとの関係を利用して解かれるべきだと考えられる。これまでに明らかになっているケースは、$GL(n)\times GL(n)$上の保型形式の対角的に埋め込まれた $GL(n)$での周期積分の非消滅、symplectic 周期の非消滅、テータ持ち上げなどにより解釈できる。今後の展望としては、いまだ十分解明されていないタイプ 2 や散在型の空間に対して、その generic isotropy 部分群における周期の非消滅と保型形式の持ち上げとの関係を究明する方向での研究を進めることが重要であろう。

②以上のように、概均質ベクトル空間のゼータ関数を保型形式に付随するゼータ関数と結び付ける際に、保型形式の Fourier 係数から定まる Koecher-Maass 型のゼータ関数がしばしば重要な役割を果たしている。しかし、正則保型形式の場合を除いては、Koecher-Maass 型のゼータ関数の理論は満足すべき形では構築されていない。本研究では、Siegel 保型形式の場合に境界値を通じて Koecher-Maass ゼータ関数の構成を試みた鈴木利明の試みを一般化することを行った（研究協力者田村敬太との共同研究）。現段階までに得られた結果としては、保型形式の満たす保型性の境界値への反映を抽象化し概均質ベクトル空間上の保型超関数を定義し、不変微分作用素環の可換性についての（技術的な）仮定の下に、その Fourier 係数を利用して定まるL関数の解析接続、および、関数等式を証明することに成功した。考えている概均質ベクトル空間が可換放物型の場合には、この理論が適用でき、また、その概均質ベクトル空間の共形群の退化主系列表現に属し数論的部分群によって不変な超関数ベクトルから概均質ベクトル空間上の保型超関数が得られることも明らかになった。これは、実解析的保型形式にも適用できる Koecher-Maass 型ゼータ関数の理論への大きなステップである。

(3)非退化二次写像のゼータ関数については、大きな進展があり、所期の目的を基本的に実現することができた。

①まず、Clifford 代数の表現空間から直交群のベクトル表現の空間への非退化二次写像から得られる4次形式の族について、それを不変とする線型変換の群の Lie 代数を完全に決定することができた。その結果として、Clifford 代数を定義する二次形式の変数の個数 n が 12 以上の場合、および、$5\leq n\leq 11$ のときには表現の次数が十分大きい場合には、問題の4次形式は概均質ベクトル空間の相対不変式とはなりえないことを示すことができた。また、例外の場合にどのような概均質ベクトル空間が現れるかも、決定されている。これによって、概均質ベクトル空間の理論の主結果である局所関数等式を満たし、かつ、概均質ベクトル空間の理論には含まれていない不変式の例が豊富に得られたことになる。この結果と、従来の概均質ベクトル空間の理論とを統合する新原理が期待されるが、それがどのようなものであるべきか、現時点では予想がついていないものの、今後の重要な発展方向を示唆していると考えられる。

②概均質ベクトル空間をターゲット空間とする有理数体上定義された非退化二次写像に対し、局所密度の無限積を係数とする大域的ゼータ関数を定義し、その関数等式を証明することができた。これは、(2)②で述べた概均質ベクトル空間上の保型超関数に付随する L 関数の理論の応用として得られた。この場合、保型超関数の保型性は、二次写像に付随する Gauss 和の相反法則の結果として導かれる。①で分類された4次形式の場合には、やはり概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論を越えた新しいゼータ関数が定義されている。ここで構成されたゼータ関数は古典的な二次形式のゼータ関数と対比すると、種に属すゼータ関数である。二次形式の場合には類に属すゼータ関数が定義されており、種に属すゼータ関数を類に属すゼータ関数の一次結合として表す公式が有名な Siegel の主定理であるということができる。しかしながら、二次形式の場合、類に属すゼータ関数の定義では概均質的な群作用が本質的に利用されており、その方法はここで得られた非概均質的な4次形式には適用できない。類に属すゼータ関数の定義、そして、Siegel の主定理の拡張がこの場合にも可能であるかどうかは、やはり、極めて興味深い今後の課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

①□Yumiko Hironaka, Spherical functions

on U(2n)/U(n) × U(n) and hermitian Siegel series, "Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables" in Series on Number Theory and Its Applications, 査読有, 2011 発行予定, World Scientific.

② Yumiko Hironaka, Spherical functions on *p*-adic homogeneous spaces, "Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and *L*-functions — Lectures at the French-Japanese Winter School (Miura, 2008)—", MSJ Memoirs, 査読有, Vol.**21**, 2010, 50—72.

③ 佐藤文広, 田村敬太, 概均質ベクトル空間の保型超関数と付随する L 関数,数理解析研究所講究録, 査読無, No.**1715**, 2010, 52--63.

④ Siegfried Bőcherer, Yumiko Hironaka, Fumihiro Sato, Linear independence of local densities of quadratic forms and its application to the theory of Siegel modular forms, Contemporary Mathematics, 査読有, Vol.**493,** 2009, 51—82.

⑤ Fumihiro Sato, Takeyoshi Kogiso, Representations of Clifford algebras and quartic polynomials with local functional equations, 数理解析研究所講究録, 査読無, No.**1617**, 2008, 51—62.

〔学会発表〕(計 9 件)

① 佐藤文広、L-functions of automorphic distributions and prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type、仙台整数論研究集会、東北大学、2010 10/9.

② 佐藤文広、二次写像のゼータ関数、藤井昭雄教授退職記念ゼータ関数研究集会、立教大学、2010 3/9.

③ 佐藤文広、田村敬太、概均質ベクトル空間の保型超関数とゼータ関数、RIMS 研究集会『保型形式・保型表現およびそれに伴う L 関数と周期の研究』(東京大学数理科学研究科、2010 1/19.

④ 佐藤文広、Clifford 環から得られる二次写像を不変にする Lie 環の決定、研究会『概均質ベクトル空間の最近の展開』、九州大学数理学研究科、2009 12/23.

⑤ 佐藤文広、二次写像のゼータ関数、研究会『概均質ベクトル空間の最近の展開』、九州大学数理学研究科、2009 12/24.

⑥ 佐藤文広、小木曽岳義、Clifford 代数の表現から得られる局所関数等式を満たす多項式について、日本数学会秋季総合分科会(関数解析分科会)、大阪大学、2009 9/27.

⑦ 佐藤文広、Representations of Clifford Algebras and local functional equations of non-prehomogeneous type、織田孝幸教授還暦記念国際研究集会 " Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables"、東京大学数理科学研究科, 2009 9/15.

⑧ 佐藤文広、小木曽岳義、Representations of Clifford algebras and local functional equations、研究集会 『群の表現と非可換調和解析の新展開』、京都大学数理解析研究所、2009 6/2.

⑨ 佐藤文広、小木曽岳義、Representations of Clifford algebras and quartic polynomials with local functional equations, JSPS-RFBR Workshop "Harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization" 、Tambara Institute of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 2008 8/25.

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　文広 (SATO FUMIHIRO)
立教大学・理学部・教授
研究者番号：20120884

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

広中　由美子 (HIRONAKA YUMIKO)
早稲田大学・教育総合科学学術院・教授
研究者番号：10153652

小木曽　岳義 (KOGISO TAKEYOSHI)
城西大学・理学部・准教授
研究者番号：20282296

谷口　隆 (TANIGUCHI TAKASHI)
神戸大学・理学研究科・講師
研究者番号：60422391