様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年３月３１日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540031
研究課題名（和文）　代数群上の保型形式をめぐって：数論的不変量と保型Ｌ関数

研究課題名（英文）　On automorphic forms on algebraic groups: Arithmetic invariants and automorphic L-functions

研究代表者
村瀬　篤（MURASE ATSUSHI）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：40157772

研究成果の概要（和文）：代数群上の保型形式に対して、いくつかの不変量が対応する。これらの不変量およびそれらの間の相互関係は、保型形式の内在的構造を調べるのに極めて有用である。本研究では、特別な場合（荒川リフト）にこれらのあいだの相互関係を調べた。この結果を用いて、ある群上の保型形式について、不変量の関係に関する予想を提出した。また、Borcherd 積と呼ばれる保型形式が、極めて強い対称性（積対称性）をもつことを示した。また、2 次ジーゲル保型形式で Borcherd 積になるものについてくわしい考察を行い、特にその重みや指標について結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Several invariants are attached to automorphic forms on algebraic groups. These invariants and relationships between them are very useful for studying the internal structure of automorphic forms. In this research, we investigated relationships between these invariants for automorphic forms of special kind called Aarkawa liftings. Using this result, we proposed certain conjectures on relations between invariants attached to automorphic forms on certain groups. We showed that automorphic forms called Borcherds products have strong symmetries (the multiplicative symmetries). We also studied the Borcherds products in detail in the genus two Siegel modular case. In particular, we obtained several results about the weights and characters of Borcherds products.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：整数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数群、保型形式、フーリエ展開、保型Ｌ関数、対称性、ボーチャーズ積

１．研究開始当初の背景

（１）荒川リフトの研究：

保型形式のフーリエ展開係数と保型Ｌ関数の中心値のあいだの関係は、１変数モジュラー形式の場合には Shintani や Shimura の先駆的な仕事を経て、Waldspurger によって証明された。Waldspurger の結果を多変数保型形式の場合に一般化する試みとして、２次ジー

ゲル形式（Sp(2)上の正則保型形式）の場合にBoecherer により予想が提出された。Boecherer の予想は、特別な場合（Siegel Eisenstein 級数, Saito-Kurokawa リフト、Klingen Eisenstein 級数、および Yoshida リフト）に Boecherer や Boecherer－Schulze-Pillot により証明されている。Sp(2)の innner form の場合にこの予想を拡張することは、Furusawa の研究グループによって提唱されていたが、正確な形は得られていなかった。さて、Sp(2)の inner form として、定符号四元数環 D 上の符号（1,1）の２次ユニタリ群 G を考える。G に対応する対称空間は Hermite ではないので、G 上の保型形式において正則性の概念は無いが、対応する表現が quaternionic discrete series に属するものは、正則保型形式とよく似た振る舞いをする。これを quaternionic 保型形式と呼ぼう。荒川は、１変数モジュラー形式のテータリフトを考察し、それが G 上の quaternionic 保型形式になることを示した。村瀬-成田は、荒川のリフトを修正し、SL(2)と D の乗法群の直積上の保型形式からのテータリフトを構成した。さらに、それが Hecke 作用素と compatible であること、従って Hecke 作用素の同時固有関数はリフトによってやはり Hecke 作用素の同時固有関数になることを示し、さらに L 関数の対応も与えた。この修正された荒川リフトの具体的様相（特にフーリエ展開）を調べるのは、Boecherer 予想を G 上の保型形式の場合に一般化する観点からも重要であった。

（２）Oda-Rallis-Schiffmann リフトの研究：

Heim は、Saito-Kurokawa リフトの場合に、それが、２次ジーゲル保型形式の中で、和対称性を持つものとして特徴づけられることを示した。Saito-Kurokawa リフトは、Oda-Rallis-Schiffmann リフトの符号 (2, 3) の場合と考えられる。Oda-Rallis-Schiffmann リフトはその後、Gritsenko や Sugano により、ヤコビ形式のテータリフトととらえる観点から詳しく研究された。Oda-Rallis-Schiffmann リフトの場合に、Heim の特徴付けの類似が成立するかどうかは興味深い問題であった。

（３）Borcherds 積の研究：

Borcherds 積は、Borcherds によって導入された符号(2,m)の２次形式に関する直交群上の保型形式で、弱正則モジュラー形式 f に対応する無限積として表されるものである。Borcherds 積は、f とジーゲルのテータ関数の積の正規化された積分とも関連する。Borcherds 積の著しい性質として、その零点および極が Heegner 因子とよばれる特殊な因子で表されることが知られている。このようなことは一般の保型形式では期待できない。Borcherds 積は、保型形式論のみならず、数論幾何、有限群論、無限次元 Lie 環論、数理物理学（特に超ひも理論）などに大きな役割を果たしている。Borcherds 積の特徴付けについては、Bruinier による因子を用いた代数幾何的なものしか知られていなかった。Borcherds 積の本質を知るためには、新しい特徴付けを得ることが望ましい。また、Borcherds 積は数理物理と密接に関係しているため、このような新しい特徴付けは数理物理への新しい応用をもたらす可能性がある。

２．研究の目的

（１）荒川リフトの研究：

① Sp(2)の inner form として、定符号四元数環上の符号（1,1）の２次ユニタリ群 G を考える。G 上の quaternionic 保型形式で、SL(2)と D の乗法群の直積上の保型形式からのテータリフトとして得られるもの（荒川リフト）のフーリエ展開係数を、SL(2)と D の乗法群の直積上の保型形式に付随する保型 L 関数の中心値と関係づける。
② ①の結果を用いて、Sp(2)の inner form 上の一般の保型形式について、そのフーリエ展開係数と、保型形式に付随する保型 L 関数の中心値の関係について予想を提出する。
③ 荒川リフトで、恒等的にゼロにならない具体例を、①の応用として与える。

（２）Oda-Rallis-Schiffmann リフトの研究：

① Oda-Rallis-Schiffmann リフトの和対称性、および Oda-Rallis-Schiffmann リフトが和対称性によって特徴づけられることを証明する。
② Oda-Rallis-Schiffmann リフトの和対称性による特徴づけの応用（特に Oda-Rallis-Schiffmann リフトの小さな直交群への制限の研究）を考察する。

（３）Borcherds 積の研究：

① Borcherds 積のこれまでに知られていなかった新しい対称性である積対称性を研究する。積対称性とは、符号（2, n）の直交群への SL(2)の相異なる２つの埋め込みから生じる Hecke 作用素型（ただし、和ではなく積をとる）の２つの作用素に関して、定数を除いて一致することである。この対称性は、保型形式に対し

て、そのフーリエ展開に対して極めて強い束縛条件を与えるため、興味深い研究対象である。

② Borcherds 積の積対称性の応用を試みる。特に、２次ジーゲル保型形式は符号 (2, 3) の直交群上の保型形式と同一視されるが、この場合は、例を豊富に作ることがでるとともに多くの深い結果がある。テストケースとして、興味深い対象であるとともに、数理物理への応用も期待できる。この場合に、Borcherds 積とその積対称性が意味するところを詳しく考察する。

③ Borcherds 積は、因子が Heegner 因子の和として書ける保型形式と特徴づけられる（Bruinier による)。したがって、Borcherds 積の積対称性が、どのように Heegner 因子の性質に反映しているかを研究することは興味深い。

④ Borcherds 積が、保型形式で積対称性を持つものとして特徴づけられるかどうかについて考察する。

３．研究の方法

（１）荒川リフトの研究：

① 荒川リフトをアデール群上のテータ積分として再定式化する。

② その積分表示を用いて、荒川リフトのフーリエ係数を積分表示する。

③ ②の積分を直接計算し、フーリエ係数と保型 L 関数の特殊値を関係づける。

④ 計算機を用いた数値実験を用いて、予想を検証する。

（２）Oda-Rallis-Schiffmann リフトの研究：

① Oda-Rallis-Schiffmann リフトの像空間は、保型形式の中で、そのフーリエ係数が Maass 関係と呼ばれる関係式を満たすものとして特徴づけられる。一方、和対称性は、保型形式のフーリエ係数に対し、別の関係式を要請する。従って、このふたつの関係式の同値性を示せば、目的が達せられることになる。

② O(2, n) 上の Oda-Rallis-Schiffmann リフトを O(2, n-1)に制限したときどのような保型形式が得られるかは興味深い問題であり、この問題に対して和対称性を応用する。

（３）Borcherds 積の研究：

① Borcherds 積は、ジーゲルのテータ関数に入力データ（弱正則モジュラー形式）を掛けて積分することによって得られる。従って、Borcherds 積の積対称性は、ジーゲルのテータ関数の和対称性に帰着される。ジーゲルのテータ関数を詳しく解析することにより、その和対称性を証明する。

② ジーゲルのテータ関数に密接に関係するものとして、保型 Green 関数があり、表現論的観点や数論幾何的観点からも興味深い対象である。ジーゲルのテータ関数の和対称性を用いて、保型 Green 関数の対称性について研究する。

４．研究成果

（１）荒川リフトの研究：

① 荒川リフトのフーリエ展開係数を指標で平均したものの絶対値の平方が、リフトされる保型形式（SL(2)と定符号四元数の乗法群の直積上の保型形式）の保型 L 関数の中心値で記述されることを示した。

② ①の結果を用いて、Sp(2)の inner form 上の一般の保型形式のフーリエ展開係数と保型 L 関数についての予想を提出した。この予想は、Boechrerer 予想の自然な一般化になっている。

③ ①の応用として、荒川リフトで、像が消えない例を無数個構成した。

以上は、連携研究者の熊本大・理・成田宏秋氏との共同研究による成果である。

（２）Oda-Rallis-Schiffmann リフトの研究：

① 直交群上の保型形式のフーリエ係数についての２つの関係式（Maass 関係と和対称性から導かれる関係式）が同値であることを代数的な考察から示した。これより、Oda-Rallis-Schiffmann リフトが和対称性により特徴づけられることが示された。

② 和対称性が、直交群上の保型形式を小さな直交群上の保型形式に制限する操作と compatible であることを示した。これにより、Oda-Rallis-Schiffmann リフトを小さな直交群上に制限すると、再び Oda-Rallis-Schiffmann リフトが得られることが示された。

以上は、研究協力者のドイツ工科大学（オマーン）・B. Heim 氏との共同研究による成果である。

（３）Borcherds 積の研究：

① ジーゲルのテータ関数の和対称性をBorcherds による公式と Poisson の和公式を組み合わせることにより示した。これによって、Borcherds 積の積対称性を示すことができた。
② ①の応用として、２次ジーゲル保型形式で Borcherds 積になるものについて、重みや指標などについてのくわしい情報を得た。また、Borcherds 積を O(2,2) に制限すると、Dedekind のエータ関数およびモジュラー多項式を用いて記述されることが示された。
③ ②の応用として、２次ジーゲル保型形式で、Saito-Kurokawa リフトかつBorcherds 積になっているものは、重みが１０の尖点形式（いわゆるχ_10）の定数倍に限ることを示した。χ_10 は最近、超ひも理論において注目を集めており、その意味でも興味深い結果である。
③ Hilbert 保型形式について、その積対称性を示し、Borcherds 積が積対称性を持つことを示した。また、Borcherds 積が Hecke 作用素について、compatible であることを示した。
④ Borcherds 積が積対称性によって特徴づけられるかどうかの研究の予備的考察として、Borcherds 積を重み０の弱正則ヤコビ形式から構成した。この構成法は、Borcherds によって１９９５年の論文で、指数が特別の場合に構成されていたが、本研究では、一般の指数の場合に構成した。
⑤ Heegner 因子の和対称性を示した。これは、Borcherds 積の積対称性の別証明を与える。Heegner 因子の和対称性がどのような幾何的意味があるか考察するのは今後の課題である。
⑥ ジーゲルのテータ関数の和対称性を用いて、保型 Green 関数の和対称性を証明した。今後、この幾何的意味を追求することは興味深い問題である。
⑦ Borcherds 積は、物理の超ひも理論において、たとえば BPS state の研究に関連して現れる。今まで、Borcherds 積の積対称性のような強い対称性は知られていなかった。この新しい対称性が何か物理的な意味を持つのかという問題は極めて興味深く思われる。今後の発展が期待される。

以上は、研究協力者のドイツ工科大学（オマーン）・B. Heim 氏との共同研究による成果である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
1. B. Heim and <u>A. Murase</u>, Borcherds lifts on Sp_2(Z), “Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables”, Proceedings of the international symposium in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60-th birthday, World Scientific, 査読有, to appear in 2011.
2. <u>A. Murase</u> and <u>H. Narita</u>, Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, Israel Journal of Math., 査読有, to appear in 2011.
3. <u>A. Murase</u>, CM values and central L-values of elliptic modular forms, Math. Ann., 査読有, 374 (2010), 529-543.
4. <u>A. Murase</u> and <u>H. Narita</u>, Commutation relations of Hecke operators for Arakawa lifting, Tohoku J. Math., 査読有, 60 (2008), 227-251.

〔学会発表〕（計 7 件）
1. <u>A. Murase</u>, A characterization of Borcherds lifts by symmetries, Ueda Memorial Conferences on Automorphic Forms, 2011 年 1 月 26 日、奈良女子大学
2. B. Heim, On recurrence relations and functional equations of infinite products, Ueda Memorial Conferences on Automorphic Forms, 2011 年 1 月 26 日、奈良女子大学.
3. B. Heim, Igusa’s modular forms, 「保型形式と関連する跡公式、ゼータ関数の研究」、2011 年 1 月 21 日、京都大学数理解析研究所.
4. <u>H. Narita</u>, Fourier coefficients of Arakawa lifting and some degree eight L-function, 日本数学会 2009 年秋期総合分科会、2009 年 9 月 24 日、大阪大学.
5. <u>A. Murase</u>, Hecke symmetries for theta series and Borcherds products, “Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables”, 2009 年 9 月 15 日、東京大学.
6. <u>A. Murase</u>, Fourier-Jacobi expansion of automorphic forms on U(2,1), Second Japanese-German Number Theory Workshop, 2008 年 2 月 19 日、Max-Planck-Institut fuer Mathematik, Bonn, Germany.

7. H. Narita, Fourier expansion of Arakawa lifting, 「保型表現・保型形式とＬ関数の周辺」､2008 年 1 月 21 日, 京都大学数理解析研究所.

６．研究組織

(1)研究代表者

村瀬　篤（MURASE ATSUSHI）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：40157772

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者

成田　宏秋（NARITA HIROAKI）
熊本大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

菅野　孝史（SUGANO TAKASHI）
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号：30183841

研究協力者

Bernhard Heim
German University of Technology (Oman)・准教授