

機関番号：12102
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2008～2010
 課題番号：20540037
 研究課題名（和文） ゴレンシュタイン多元環の研究

研究課題名（英文） Study of Gorenstein algebras

研究代表者

星野 光男 (HOSHINO MITSUO)
 筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師
 研究者番号：90181495

研究成果の概要（和文）：

代数幾何学におけるセール双対の理論をネター多元環の場合に拡張し、この概念を用いて、ネター多元環のゴレンシュタイン性の特徴付けを与え、かつ、ゴレンシュタイン多元環上の与えられた傾斜鎖複体に対して、その準同型多元環がまたゴレンシュタイン多元環になるための必要十分条件を与えた。ここで、ネター多元環とは可換ネター環上の多元環で加群として有限生成のものを指し、ゴレンシュタイン多元環とは可換ゴレンシュタイン環上のネター多元環で導来圏における基礎環上の双対が射影的生成素を移動したものと同型になるものを指す。

研究成果の概要（英文）：

We extended Serre duality theory in algebraic geometry to Noether algebras and, using this notion, we characterized Gorensteinness of Noether algebras and provided a necessary and sufficient condition for a tilting complex over a Gorenstein algebra to have a Gorenstein algebra as an endomorphism algebra. Here, a Noether algebra is a module-finite algebra over a commutative Noether ring and is said to be a Gorenstein algebra if its dual over a Gorenstein base ring in the derived category is a shifted projective generator.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：多元環の表現論

1. 研究開始当初の背景

研究代表者の星野は加藤との共同研究で、準フロベニウス多元環上の傾斜鎖複体に対して、その準同型多元環がまた準フロベニウス多元環となるための必要十分条件を与え、その応用として、対称多元環上の傾斜鎖複体に対して、その準同型多元環は常に対称多元環

となることを示したが、実際には、有界な導来圏におけるセール双対の存在を示していた（セール関手は中山関手）。さらに、研究代表者の星野は阿部との共同研究でこの結果をネター多元環の場合に拡張した。ここでは、先ず、準フロベニウス多元環の概念をネター多元環の場合に拡張して、可換ゴレンシ

ユタイン環上のネター多元環で基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持ち、かつ基礎環上の双対加群が射影的生成加群となるものをゴレンシュタイン多元環と定義し、ゴレンシュタイン多元環がアウスランダー条件を満たす（より強く、後藤・西田の意味でのゴレンシュタイン多元環である）ことを示し、次に、ゴレンシュタイン多元環上の有界な導来圏において部分的にセール双対が存在することを示した（セール関手は中山関手）。その応用として、ゴレンシュタイン多元環上の傾斜鎖複体に対して、その準同型多元環がまたゴレンシュタイン多元環となるための必要十分条件を与えた。特に、中山関手が恒等的であるようなゴレンシュタイン多元環のクラスが導来同値の下で閉じていることを示した。本研究の主目的は、これらの結果を高次元化することである。

2. 研究の目的

代数幾何学におけるセール双対の概念をネター多元環の場合に拡張し、セール双対の観点からネター多元環のゴレンシュタイン性の特徴付けを与える。さらに、ネター多元環のゴレンシュタイン性が導来同値の下で保存されるための必要十分条件をセール双対の言葉で記述することを目的とする。そのために、先ず、上で定義したゴレンシュタイン多元環の概念を高次元化する。具体的には、可換ゴレンシュタイン環上のネター多元環で基礎環上の加群として有限のゴレンシュタイン次元を持つものに対して、それがアウスランダー条件を満たす（より強く、後藤・西田の意味でのゴレンシュタイン多元環になる）ための条件を与える。次に、新しく定義したゴレンシュタイン多元環に対して、その上の有界な導来圏におけるセール双対の存在を示す。ただし、基礎環上の双対関手の完全性が失われるため、セール双対の概念も導来化する必要がある。もちろん、ゴレンシュタイン多元環の概念を高次元化しても、基礎環上の加群としての零化イデアルに含まれる適当なイデアルによって基礎環を割れば、ゴレンシュタイン次元0を持つ場合に帰着する可能性は充分にある（しかし、それは環としての構造であって、多元環としての構造ではない。例えば、代数幾何学においては、基礎環を体上の多項式環にとった可換ゴレンシュタイン多元環を扱うが、イデアルによって基礎環を割ったとき、剰余環が多項式環となる保証はない）。

3. 研究の方法

研究代表の星野は準研究員の阿部および大学院生の古賀との間で毎週土曜に研究セミナーを開催し、研究分担者の藤田は自分の研究の観点から適宜研究代表の星野に助言を

与えた。また、研究代表の星野は研究集会はもちろん他大学で開催される研究セミナーにも積極的に参加し、成果発表・情報収集を行い、関連分野の研究者との研究討論を活発に行った。

(1) 上述の阿部との間で、阿部の博士論文作成の指導を兼ねて共同研究を行って来たが、平成20年度もその共同研究を続行した。具体的には、先ず、ネター多元環で基礎環上の加群と見たときのサポートに属する任意の素イデアルで局所化したとき、基礎環がゴレンシュタイン局所環になるものを扱う。さらに、基礎環の極小移入分解をHomで係数拡大した鎖複体のホモロジーがc番目の1ヶ所を除いてすべて消滅している（このとき、余次元cと呼ぶことにする）と仮定し、そのゴレンシュタイン性を考察する。具体的には、唯一生き残っているc番目のホモロジーが右加群として射影的生成加群になっている（この条件が左右対称であることも示した）との仮定の下で、その多元環が後藤・西田の意味でのゴレンシュタイン多元環となることを示した。

(2) 平成21年度も阿部との共同研究を続行した。具体的には、先ず、ネター多元環で基礎環上の加群と見たときのサポートに属する任意の素イデアルで局所化したとき、基礎環がゴレンシュタイン局所環になるものを扱った。基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持ち、基礎環上の双対が両側加群として元の多元環と同型である様な多元環について（ゴレンシュタイン整環と呼ぶことにする）、与えられた有限生成加群に対して、その加群と多元環自身との直和の準同型多元環がまたゴレンシュタイン整環となるための条件を与えた。

(3) 平成22年度は、上述の古賀との間で、古賀の博士論文作成の指導を兼ねて共同研究を行った。具体的には、完備な可換ゴレンシュタイン局所環上のネター多元環で基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持つものに対して、先ず、基礎環上の双対が多元環上の右加群として射影的ならアウスランダー・ゴレンシュタイン多元環であることを示した。次に、基礎環上の双対が多元環上の右加群として古典的傾加群の場合に、アウスランダー・ゴレンシュタイン多元環であるための必要十分条件を与えた。

(4) 研究分担者の藤田は、具体例の計算を通して、ゴレンシュタイン多元環の環論的構造の研究を行った。

4. 研究成果

(1) 平成20年度：研究代表者の星野は阿部との共同研究によって、以下の結果を得た。
①ネター多元環で基礎環上の加群と見たときのサポートに属する任意の素イデアルで

局所化したとき、基礎環がゴレンシュタイン局所環になるものを扱う。さらに、基礎環の極小移入分解をHomで係数拡大した鎖複体のホモロジーがc番目を除いてすべて消滅しているとする。このとき、先ず、生き残ったc番目のホモロジーについて、それが右加群として射影的生成加群であることと、左加群として射影的生成加群であることとは同値であることを示した。次に、上の同値条件が充たされるとき、その多元環は後藤・西田の意味でのゴレンシュタイン多元環(余次元cのゴレンシュタイン多元環と呼ぶことにする)となることを示した。②代数幾何学におけるセール双対の概念をネター多元環の場合に拡張し、ネター多元環で基礎環上の加群と見たときクルル次元有限でかつサポートに属する任意の素イデアルで局所化したとき、基礎環がゴレンシュタイン局所環になるものに対して、それが左右でセール双対を持つことと左右で有限の自己移入次元を持つ(これをゴレンシュタイン性の定義とする流儀もある)こととが同値であることを示した。③余次元cのゴレンシュタイン多元環上の与えられた傾斜鎖複体に対して、その準同型多元環がまた余次元cのゴレンシュタイン多元環になるための必要十分条件を与えた。

(2) 平成21年度: 研究代表者の星野は阿部との共同研究によって、以下の結果を得た。①与えられたゴレンシュタイン整環上の有限生成右加群で基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持つものに対して、その加群と多元環自身との直和の準同型環がゴレンシュタイン整環であるとき、任意の整数nに対して、その加群のn番目のシジジーの準同型環およびn番目のシジジーと多元環自身との直和の準同型環はまたゴレンシュタイン整環であることを示した。②与えられた(基礎環を共有する)1対のゴレンシュタイン整環およびそれらの上の1つの双加群に対して、それらが行列環を定め、かつその行列環がゴレンシュタイン整環となるための十分条件を与えた。特に、与えられたゴレンシュタイン整環上の有限生成右加群で基礎環上ゴレンシュタイン次元0のものに対して、その加群と多元環自身との直和の準同型環(行列環で表せる)がゴレンシュタイン整環となるための十分条件を与えた。

(3) 平成22年度: 研究代表者の星野は古賀との共同研究によって以下の結果を得た。①可換ゴレンシュタイン環上のネター多元環で、基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持つものについて、その基礎環上の双対が古典的傾加群(射影次元1以下の傾加群)であるためには、右または左加群として射影次元1以下であることが必要十分である。②可換ゴレンシュタイン局所環上のネ

ター多元環で、基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持つものについて、その基礎環上の双対が傾加群ならば、左右の自己移入次元は共に基礎環のクルル次元と基礎環上の双対の射影次元との和に一致する。③完備な可換ゴレンシュタイン局所環上のネター多元環で、基礎環上の加群としてゴレンシュタイン次元0を持ち、かつ基礎環上の双対が傾加群である様なものについて、それがアウスランダー・ゴレンシュタイン環であるためには、基礎環上の双対の左加群としての極小射影分解の基礎環上で双対を取って得られる複体のn番目の項の射影次元が常にn以下となることが必要十分である。④上の③の結果を一般化して、ネター環のアウスランダー・ゴレンシュタイン分解の概念を導入し、アウスランダー・ゴレンシュタイン環を基礎環(可換とは限らない)に持つネター環がアウスランダー・ゴレンシュタイン分解を持てば、それはアウスランダー・ゴレンシュタイン環である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① M. Hoshino and H. Koga, “Auslander-Gorenstein resolution”, J. Pure Appl. Algebra (to appear), 査読有
- ② H. Abe and M. Hoshino, “Gorenstein orders associated with modules”, Comm. Algebra 38(1), 165-180 (2010), 査読有
- ③ H. Abe and M. Hoshino, “Derived equivalences for triangular matrix rings”, Algebras and Representation Theory 13(1), 61-67 (2010), 査読有
- ④ H. Abe and M. Hoshino, “Derived equivalences and Serre duality for Gorenstein algebras”, J. Pure Appl. Algebra 213, 2156-2166 (2009), 査読有
- ⑤ H. Fujita and A. Oshima, “A tiled order of finite global dimension with no neat primitive idempotent”, Comm. Algebra 37, 575-593 (2009), 査読有
- ⑥ H. Abe and M. Hoshino, “Frobenius extensions and tilting complexes”, Algebras and Representation Theory 11(3), 215-232 (2008), 査読有

[学会発表] (計4件)

- ① M. Hoshino and H. Koga, “Auslander-Gorenstein resolution”, 2010年9月11日、第43回環論および表現論シンポジウム、鳴門教育大学
- ② H. Abe and M. Hoshino, “Derived equivalences for endomorphism rings”、

2009年10月11日、第42回環論および表現論シンポジウム、大阪教育大学(天王寺)

③ H. Abe and M. Hoshino, “Derived equivalences for triangular matrix rings”、2008年9月6日、第41回環論および表現論シンポジウム、静岡大学

④ 藤田尚昌、「構造系を持つ全行列多元環」、2008年8月5日、第53回代数学シンポジウム、いわて県民情報交流センター(アイーナ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

星野 光男 (HOSHINO MITSUO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・講師

研究者番号：90181495

(2) 研究分担者

藤田 尚昌 (FUJITA HISAAKI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授

研究者番号：60143161

(3) 研究協力者

阿部 弘樹 (ABE HIROKI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准研究員

研究者番号：20533342

(4) 研究協力者

古賀 寛尚 (KOGA HIROTAKA)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・博士後期課程1年