

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月8日現在

研究機関	12401
研究種目	基盤研究(C)
研究期間	2008～2010
課題番号	20540038
研究課題名(和文)	平面代数曲線の有理関数体と特異点の研究

研究課題名(英文) On rational functions and singularities of plane algebraic curves

研究代表者

酒井 文雄 (SAKAI FUMIO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：40036596

研究成果の概要(和文)：種数3のピカール曲線のワイエルシュトラス点の分布，栗林4次曲線の2-ワイエルシュトラス点の分布，種数2の曲線で余分な対合を持つ曲線の3-ワイエルシュトラス点の分布に関する研究を行い，論文として出版した．また，特異平面曲線のゴナリティの判定法に関する新しい結果を得た．

研究成果の概要(英文)：We studied Weierstrass points on Picard curves, 2-Weierstrass points on Kuribayashi curves and 3-Weierstrass points on genus two curves. We published papers on these topics. We also obtained new results concerning the criterion for the gonality of singular plane curves.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学 B

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

1. 研究開始当初の背景

代数曲面と曲線の組の研究から，平面代数曲線の研究の重要性を理解し，本研究を着想した．

(1) 射影代数多様体上の超曲面について，対数的小平次元を研究した．続いて，射影代数曲面とその上の曲線の組に対しても，曲線が正規交差の場合に，古典曲面論における分類理論が成立することを示した．この研究の過程で，宮岡 - ヤウ型の不等式の対数版を証明した．

(2) 1980年代の中頃から，平面代数曲線の研究を開始した．有理的で特異点として尖点のみをもつ平面代数曲線を有理尖点曲線という．この有理尖点曲線について，曲線の次数は特異点の最大重複度の3倍未満でなければならないという予想を肯定的に解決した．

(3) $(d, d-2)$ 型の有理尖点曲線について，尖点の個数が2個以下の場合の分類を完成した．また，この分類結果を，任意の特異点を許す場合に拡張し，さらに，正種数の場合に拡張する研究を行った．

(4) 特異点を持つ平面曲線における有理関数体の不変量ゴナリティを考察し，ゴナリティーが次数と特異点の最大重複度との差に一致するための判定法をいくつか証明した．さらに，この判定法が有効ないくつかの例を構成した．

2. 研究の目的

特異点を有する平面代数曲線の有理関数体の系統的な研究を推進することが目的である．

(1) 平面曲線の有理関数体に関する基礎的研究を進める．特に，不変量ゴナリティーについてさらに研究する．また，ワイエルシュトラス点や高次ワイエルシュトラス点等の研究も推進する．

(2) 特異平面曲線の特異点と構成法の基礎的

研究を進める．特異平面曲線の存在および構成問題は重要である．与えられた特異点をもつような曲線の構成方法を研究する．

3. 研究の方法

(1) これまでの研究により，特異点を持つ平面代数曲線のゴナリティを決定するいくつかの判定法とゴナリティを下から評価する不等式を得ているが，改良の余地のある部分もあると思われるので，これらの結果の一般化を考察する．また，特異点の最大重複度を固定して，ゴナリティと種数の関係を調べる．

(2) 平面代数曲線の特異点について基礎的な研究をする．平面曲線の多項式変換像やクレモナ変換像についての研究を進める．

(3) 次に，曲線のモジュライ空間のストラティフィケーションを研究する．従来から，一般的な曲線の性質については，ブリル・ネーター理論等の一般論があり，かなりのことが理解できるのであるが，特殊な曲線の研究はあまりない．そこで，小さい種数の場合に，ゴナリティや高次ワイエルシュトラス点によるストラティフィケーションを研究する．

4. 研究成果

(1) ピカール曲線族と呼ばれる種数3の平面4次曲線の2パラメータ族を考察し，これらの4次曲線のワイエルシュトラス点の分布をモジュライ空間において詳細に研究した．この曲線族のモジュライ空間は，パラメータ空間を作用する4次の対称群で割った商空間になり，不変式を求めることにより，具体的な記述が可能である．この曲線族の4次曲線のワイエルシュトラス点で重複度が2のものの個数は1, 4, 7の3通りであり，個数が4以上の曲線はパラメータ空間では次数18の曲線を構成している(川崎真澄氏)．この曲線のモジュライ空間

上における像は特異 4 次曲線になることを証明した．さらに， の 24 個の特異点は像の特異 4 次曲線の 2 重接線の 2 つの接点のどちらかに写像されることも判明した．

(2) 1 - パラメーターを持つ栗林 4 次曲線族上の 2-ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的性質の研究を Alwaleed 氏 (当時, 博士課程の院生) と共同で行った．一般に, 非特異 4 次曲線上の 2-ワイエルシュトラス点は変曲点かセクスタクティック点とよばれる点であることが知られている．栗林 4 次曲線族のパラメーター a の値に対して, 2-ワイエルシュトラス点がどのようなセクスタクティック点であるかを分類した．新しく, 3 種の特殊な曲線を見つけた．栗林曲線族のように巡回被覆構造を持たない平面曲線上の 2-ワイエルシュトラス点の計算にはいろいろ困難があり, いくつかの新しい方法を開発して, 上記の結果に到達した．これらの方法は他の曲線の研究にも, また他の問題にも役立つと期待される．

(3) 種数 2 の平面曲線で超楕円対合以外に余分な対合を持つ曲線族 $y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$ の 3-ワイエルシュトラス点の分類と幾何学的な研究を Farahat 氏 (当時, 博士課程の院生) と共同で行った．パラメータにより, 重み 2 と重み 1 の 3-ワイエルシュトラス点の分布が異なる．パラメータ空間における数種類の曲線が現れ, 特別な分布に対応していることがわかる．さらに, これらの曲線のいくつかは自己同型群の分類において得られるものと一致することが判明した．研究方法はロンスキアン形式の零点の位数を計算するという古典的な方法であるが, 位数の計算には部分終結式の計算と幾何学的考察を併用した．

(4) 平面曲線のゴナリティ G に関する研究において, いくつかの進展があった． d 次平面

曲線 C の特異点の最大重複度を ν とすると, 不等式 $G \leq d - \nu$ が成立する．2004 年の論文 (大河内正仁氏との共著論文) において, 等号 $G = d - \nu$ が成立するための十分条件を 2 種類証明した．今回の研究により, 上記の結果をいくつかの点において改良することに成功し, 現時点における成果をプレプリントにまとめている．特に, $\nu = 3$ の場合には最良と思われる結果を得ている．さらなる進展も期待され, 研究を継続している．新しい観点は G の下からの評価式 $G \geq d - \nu - q$ を考察することである．また, 以前の補題を再検討することにより, 特異点の寄与をより細かく制御することが可能になり, 結果が改良された．

5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計 5 件)

- ① Mohamed Farahat and Fumio Sakai, The 3-Weierstrass points on genus two curves with extra involutions, Saitama Math.J., 査読有, Vol.28, 2011, 1-12
- ② Fumio Sakai, Weierstrass points and S_4 geometry of Picard curves, School in Algebraic Geometry, 査読無, Vol.3, 2010, 143-158
- ③ Fumio Sakai, Mohammad Saleem and Keita.Tono, Hyperelliptic plane curves of type $(d,d-2)$, Beitrage zur Algebra und Geometri, 査読有, Vol.51, 2010, 31-44
- ④ Kamel Alwaleed and Fumio Sakai, Geometry and computation of 2-Weierstrass points on Kuribayashi quartic curves, Saitama Math. J., 査読有, Vol.26, 2009, 67-82
- ⑤ Fumio Sakai, Geometry of Weierstrass

points for 2-parameter families of plane curves, 第6回代数曲線論シンポジウム報告集, 神奈川大学, 査読無, 2008, 94-103

(学会発表)(計 7件)

- ① 酒井文雄, 平面曲線族における高次ワイエルシュトラス点の計算, 津山代数幾何シンポジウム 2011, 2011年7月27日, 津山高専
- ② 酒井文雄, On the gonality of singular plane curves II, アフィン代数幾何研究会, 2011年3月5日, 関西学院大梅田キャンパス
- ③ 酒井文雄, 2-Weierstrass points on Kuribayashi quartic curves, Tsuda College Mini-Workshop on Number Theory and Physics at the Crossroads, 2010年8月29日, 津田塾大学
- ④ 酒井文雄, Geometry and computation of Weierstrass points, 2009年9月5日, 神奈川大学富士見高原研修所
- ⑤ 酒井文雄, Weierstrass points and S4 geometry of Picard curves, Affine Algebraic Geometry, 2008年12月27日, Bangalore, India
- ⑥ 酒井文雄, Weierstrass points and S4 geometry of Picard curves, Tsuda College Mini-Workshop on Number Theory and Physics at the Crossroads, 2008年8月5日, 津田塾大学
- ⑦ 酒井文雄, The gonality and the genus of singular plane curves, 2nd NIMS School in Algebraic Geometry, 2008年5月12日, Daejeon, Korea

(図書)(計 1件)

- ① 酒井文雄, 共立出版, 大学数学の基礎, 2011, 137

(その他)

ホームページ

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/FumioSakai.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 文雄 (SAKAI FUMIO)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 40036596

(3) 連携研究者

小嶋 久祉 (KOJIMA HISASHI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 90146118
福井 敏純 (FUKUI TOSHIZUMI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 90218892
海老原 円 (EBIHARA MADOKA)
埼玉大学・大学院理工学研究科・講師
研究者番号: 80213578
戸野 恵太 (TONO KEITA)
埼玉大学・大学院理工学研究科・非常勤講師
研究者番号: 30422215