様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月２４日現在

機関番号：12701
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：20540039
研究課題名（和文）　射影多様体の定義イデアルと埋込みの構造

研究課題名（英文）
Defining ideals of projective varieities and their embedding structure
研究代表者
野間　淳　（NOMA ATSUSHI）
横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：90262401

研究成果の概要（和文）：
射影多様体に対して，その多様体が像と双有理にならないような点射影の中心を，非双有理中心と呼ぶ．本研究課題では，非双有理中心を持つ，射影多様体の特徴付けを与えた．この特徴付けは，非双有理中心を持つ射影多様体を構成法も与える．この特徴付け結果，特に，非特異な射影多様体のイデアル層のある種の半豊富を示し，イデアル層の regularity の評価を改良した．他方で，点射影の応用として，二重点因子と呼ばれる因子の豊富性が得られた．

研究成果の概要（英文）：
For a projective variety, a point from which the variety is projected nonbirationaly onto its image is called a nonbirational center. In this research, we obtained a characterization of projective varieties with nonbirational center(s). As applications of this characterization, for a smooth projective variety, we showed some semiampleness of its ideal sheaf and improved the regularity bound of the ideal sheaf. On the other hand, as an application of linear projections, we show the very ampleness of the double-point divisor of a projective variety.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,300,000	390,000	1,690,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：(1) 射影多様体, (2) 射影空間への埋め込み, (3) 線形射影, (4) 内点射影, (5) 定義方程式, (6) 斉次イデアル, (7) カステルヌーボーマンフォード正則性, (8) 二重点因子.

１．　研究開始当初の背景

射影多様体の regularity は，幾何学的には，射影空間の超曲面が，どのくらい大きな次数の時に，射影多様体上の完備な線形束となるかを表わす量であるとともに，代数的には，射影空間内での定義方程式の次数やその関係式であるシジジーの次数の上限を表す量であり，射影多様体の幾何学的側面と代数的側面を結びつける大変重要な不変量である．定義を正確に述べると，P^N の射影多様体 X が，m-regular であるとは，X の P^N でのイデアル層 I_X を直線束 $O_P(1)$ で捻った次の cohomology の消滅条件
(C_m)「$H^i(P^N, I_X(m-i))=0$ （全ての i>0)」

が成立することである．そして，(C_m)が成立する最小のmが，Xの regularity である．

本研究の背景には，未解決問題の regularity 予想「(C_{d-e+1})：次数d，次元n，余次元 e(=N-n)のいかなる超平面にも含まれないP^Nの射影多様体Xは，(d-e+1)-regular であろう」がある．この予想に対して，さまざまな形のアプローチが現在までに行われているが，代数曲線の場合の[Gruson-Lazarsfeld-Peskine 1983]と非特異複素代数曲面の場合の[Lazarsfeld 1987]以外の，一般の場合には，いまだ未解決である．

本研究は，(C_m)に関連する次の条件

(A_m) Xに含まれない直線Lと，Xとの交点数の上限は，mである；

(B_m) Xは，Xを含む次数m以下の超曲面の共通部分E_m(X)と一致する；

に注目して，特に(B_{d-e+1})と(A_{d-e+1})を示すことを目標に研究を進めようとするものである．これらに関して，Castelnuovo-Mumford の一般論によって，(C_m)⇒(B_m)⇒(A_m)が成立し，他方で(C_{d-e+1})が成立することが regularity 予想で期待されているので，(A_{d-e+1})や(B_{d-e+1})が成立するかどうか調べることは自然な問題となる．さらに，拡張された regularity 予想では，mがd-e+1に十分に近い場合には，(A_m)⇒(C_m)も成立すると予想されているので，これらの条件の隠れた相互関係を調べることも重要であると考えられる．

(A_{d-e+1})については，[M.Bertin 2002] と [S.Kwak 2005] による先行研究をもとに，これまでにも研究してきた．そして，射影多様体が Cohen-Macaulay 的な場合には(A_{d-e+1})成立することを証明し，さらには，多重割線と切断種数の関係を明らかにしてきた．しかしながら，特異点を持つ一般の場合には，(A_{d-e+1})の証明が得られていない．

他方，(B_{d-e+1})について，これまでの研究によって，線形射影を用いた超曲面の構成方法によって研究してきた．これにより，これらの超曲面の共通部分は，射影多様体とその非双有理中心点集合からなることがわかっているので，非双有理中心点集合が空集合でない射影多様体を特徴づけることや，非双有理中心点集合を射影多様体から分離するために必要な超曲面をどのように探すかということが問題となっていた．このことが，本研究の出発点である．別の立場から，Xの外の非双有理中心点集合B(X)については，射影幾何の立場から[Calabri-Ciliberto 2001]においても研究されている．

２．研究の目的

本研究では，代数多様体の射影空間の埋め込みの構造について，定義方程式や定義イデアルなどの代数的な対象と，線形射影や多重割線，射影多様体を含む超曲面などの幾何学的な対象，その相互関係に注目して調べることを目的とした．この相互関係を，regularity (Casetlnuovo-Mumford regularity)によって結びつけるところに重点をおいた．

具体的には，これまでの研究を継続発展させ，P^Nで，次数d，次元n，余次元e(=N-n)の射影多様体Xについて，

「(A_{d-e+1})：Xに含まれない直線Lと，Xとの交点数の上限は，d-e+1であろう」

「(B_{d-e+1})：Xは，Xを含む次数d-e+1以下の超曲面の共通部分と（集合として，または，スキームとして，斉次イデアル的に,）一致するであろう」

という問題の解決を中心に，研究を行うことである．そして，本研究の背景にある未解決問題 regularity 予想の解決へ向けての道筋や新たな研究対象を見つけることを目標とした．

３．研究の方法

目的の達成のため，次の(1)～(3)の問題に分割して，平行して研究を進めた．

(1)「Xの外の非双有理中心点集合B(X)を射影多様体から分離する超曲面の構成」

(B_{d-e+1})を証明する際に重要な，B(X)をXから分離する次数の低い超曲面，また，C(X)での接空間を分ける次数の低い超曲面を，それぞれ構成する方法を模索した．そのためには，消去法の理論などの代数的なアプローチから，いろいろな例を直接計算した．また，幾何学的なアプローチとして，線形射影のうまい利用方法も検討した．

(2) 「非双有理中心点集合を持つ多様体の特徴づけ」

非双有理中心点集合を持つ多様体は，際立った特徴を持っていることが期待されている．特に，その成分の個数の上限を射影多様体の不変量によって押さえること，成分の配置に関する研究を合わせて行った．

(3)「射影多様体を含む次数 d-e 以下の超曲面の構成」

(B_m) m≦d-e+1について同様の研究を行った．(B_{d-e})が成立しない射影多様体は，特殊な多様体で，特異点を持たない場合には分類可能であることが期待される．(B_m) m≦d-e+1 が成立するかどうか調べることにより，(B_{d-e+1})や非双有理中心点集合関する新たな知見を得ることを試みた．

他方で，関連するk-射影正規性（k次超曲面が作る線形束は射影多様体上完備）や，代数曲線や代数曲線上のスクロールなどの特別な多様体の regularity を調べることも同時に行った．

４．研究成果

以上の目的や方法のもとに次のような成果を得た．

(1) 「射影多様体の定義方程式と非双有理中心点集合」

B(X)を，X が双有理に写されない線形射影のXの外の中心点の集まり（非双有理中心点集合）とし，C(X)を，X内の非双有理中心点集合とする．空でない B(X)や C(X)を持つような射影多様体 X を,特徴付け，かつそのような射影多様体Xを構成する方法を与えることに関して，以下の結果が得られた．

① 「C(X)が空でない射影多様体の特徴付け」C(X)が空でない射影多様体Xは，ある多様体上の錐の余次元が１の部分多様体であることがわかった．さらに，錐の特異点解消で，そこへの多様体Xの引き戻しが因子となっているような，射影多様体Y上のスクロール構成し，X の引き戻しの因子 X~の条件を与えることによって，C(X)を持つ射影多様体Xの特徴づけを与えた．頂点集合へうつされるスクロールの例外集合Λ~は，Λ×Yとなっている．このとき，

C(X)の既約成分 L で X のガウス写像が定値となるようなものを持つためには，スクロールの例外集合Λ~と因子 X~の共通部分は，分解型（Λ~=Λ×Yの因子として，Λからの因子と Y からの因子の引き戻しの和）となっていることが条件である．

C(X)の既約成分Lでの X のガウス写像が定値となるようなものを持つためには，Xが有理スクロール上の(μ，1)型因子 X~の双有理像となっていることが条件である．

② 「C(X)を X から分離する超曲面を構成」錐の特異点解消の中でのXの引き戻しを定義する方程式から，C(X)をXから分離する超曲面を構成する方法を得ることができた．さらに，C(X)が空でない射影多様体の具体例を構成し，定義方程式を検討した．しかし，これらの超曲面について十分な情報を得るには至らず，この点は次年度以降の研究課題であることが明確になった．

③ 「C(X)の既約成分の次元に関する不等式の精密化」C(X)の既約成分 L の次元は，L でのXのガウス写像が定値のときは，Xの特異点集合の次元よりも高々１大きく， L での X のガウス写像が非定値のときは，X の特異点集合の次元よりも高々２大きいことがわかった．特に，非特異多様体X に対しては，dim C(X)≦1 であり，更に dim C(X) = 1となる射影多様体を特徴づけることができた．

④ 構成法と関連して，線形部分空間が B(X)や C(X)の既約成分となるための条件を得ることができた．

⑤ 「イデアル層の半豊富」 B(X)や C(X)を持つ射影多様体の特徴付けの応用として，非特異影多様体のイデアル層を(d-e+1)次だけ捻ると半豊富となることを証明した．実際は，より強く，捻られたイデアルは，固定点を持たないことが期待されている．この結果は，次の重要な応用を持っている．

⑥ 「イデアル層の regular」非特異影多様体のイデアル層は，(e(d-e)+1)-regular であることを示した． この結果は， Mumford-Bertrum-Ein-Lazarsfeld による Castelnuovo-Mumford regularity の上限を改良になっている．

⑦ 「イデアル層の漸近的な regularity」非特異影多様体のイデアル層の漸近的な regularityの上限がd-e+1となることが証明できた．この結果は， regularity 予想の一つの状況証拠となるものである．

(2)「射影多様体の一般内点からの線形射影の構造と，非特異射影多様体の二重点因子の豊富性の研究」

本研究中に，射影多様体の非双有理中心点の研究から着想した，二重点因子の豊富性の問題を考察した．射影多様体の双有理中心点とは，その点からの線形射影により，射影多様体が像と双有理にならない中心点のことである．射影多様体が非特異な場合に，二重点因子とは， Hを超平面切断因子，Kを標準因子とするとき，因子(d-n-2)H-K のことである．ただし，d は多様体の次数，n は多様体の次元を表す．これまでに，Mumford により，この因子は固定点を持たないことが知られていた．本研究の考察で，非双有理中心点でない射影多様体の点を一つ選ぶと，それに対し十分一般の内点が張る線形部分空間からの線形射影は，選ばれた点で埋め込みとなることがわかっていた．この線形射影を用いて，(d-n-2)の部分を小さく取り替えるアイデアで，問題を考察し，次の結果を得ることができた．

①「非特異な射影多様体で，m 個の一般内点からの線形射影が例外因子を持たないとすると，二重点因子の一種(d-n-2-m)H-K の固定点は，非双有理中心内点の集合に含まれる」ことを示した．

② 一般内点からの線形射影が例外因子を持つ，非特異とは限らない場合を含む，射影多様体の分類を得た：

一般の１点からの線形射影が例外因子を持つのは，曲線上のスクロールの場合のみである．一般の２点からの線形射影が例外因子を持つのは，１点の場合に加えて，ベロネーゼ曲面の錐の場合のみである．一般の３点以上からの線形射影が例外因子を持つのは，上の場合以外にはない．

③ この結果として，非双有理中心内点をもつ射影多様体の特徴付けと合わせることで，いくつかの例外的な場合を除くと，非特異射影多様体に対し(d-n-e-1)H-K は高々有

限個の固定点を持ち，(d-n-e)H-K は豊富であることが証明できた．ここで，e は射影多様体の余次元を表す．

④ 上の応用として，未解決問題 regularity 予想の一部をなす，「非特異射影多様体の構造層の regularity は，d-e 以下である」ことが，スクロールを除き，証明できた．他方，シジジーの問題 Np 性について，③の例外的な場合を除くすべての非特異射影多様体に対して，「$O_X(k)$は(N_{k-d+e})性を満たす（すなわち，$O_X(k)$による X の埋め込みは，(k-d+e)番目のシジジーまでは次数が１つずつ上がる）」を示すことができた．更に，Δ種数の評価式も得ることができた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Atsushi Noma, Hypersurfaces cutting out a projective variety, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.362(9), (2010), 4481-4495, 査読有り.

② Atsushi Noma, Multisecant subspaces to smooth projective varieties in arbitrary characteristic, Proceedings of the American Mathemtical Society, Vol. 137(12), (2009), 3985-3990, 査読有り.

③ Atsushi Noma, Rational curves of Castelnuovo-Mumford regularity d-r+1, Journal of Algebra, Vol. 321 (2009), 2445-2460, 査読有り.

④ Atsushi Noma, Hypersurfaces cutting out a projective variety, Oberwolfach Reports, Vol.5 (2), (2008), 1453-1456, 査読無し.

〔学会発表〕（計９件）

① Atsushi Noma, Projective varieties whose generic inner projections have exceptional divisors, 研究集会「Computational Aspects of Birational Geometry」,2011 年 3 月 30 日, NIMS, Daejeon, Korea.

② Atsushi Noma, Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double-point divisors,研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2009」, 2010 年 11 月 7 日, 高知大学理学部.

③ Atsushi Noma, 射影多様体の一般の内点からの線形射影と二重点因子の positivity,日本数学会　代数学分科会, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学.

④ Atsushi Noma, Structure of projective varieties with non-birational linear projections and its applications to syzygy problems, Joint meeting of the Korean Mathematical Socity and the American Mathematical Socity, 2009 年 12 月 19 日, Ewha Womans University, Seoul, Korea.

⑤ Atsushi Noma, Structure of projective varieties with non-birational linear projections and its applications, 研究集会「Syzygies of Projective Varieties」,2009 年 9 月 15 日,佐賀大学.

⑥ Atsushi Noma, Projective varieties with nonbirational linear projections and applications, 2009 Algebraic Geometry Workshop at KAIST, 2009 年 4 月 10 日,KAIST, Deajeon, Korea.

⑦ Atushi Noma, Projective varieties with nonbirational linear projection, 代数幾何学 in 九州,2009 年 2 月 4 日, 九州大学理学部.

⑧ Atsushi Noma, Projective varieties with nonbirational linear projection, KAIST ASARC Workshop on Syzygies and Geometry, 2008 年 11 月 13 日,KAIST Daejeon, Korea.

⑨ Atsushi Noma, Hypersurfaces cutting out a projective variety, Classical Algebraic Geometry, 2008 年 6 月 12 日, Mathematisches Forschungsinstitute Oberwolfach, Germany.

６．研究組織

(1)研究代表者

野間　淳（NOMA ATSUSHI）

横浜国立大学・教育人間科学部・准教授

研究者番号：90262401

(2)研究分担者（なし）

（　　）研究者番号：

(3)連携研究者（なし）

（　　）研究者番号：