

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 3 月 31 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 年度～2011 年度

課題番号：20540044

研究課題名（和文） 正標数を含む代数多様体の数論と幾何に関する研究

研究課題名（英文） Research for arithmetic and geometry of algebraic varieties including positive characteristic

研究代表者 伊藤 浩行

(HIROYUKI ITO)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：60232469

研究成果の概要（和文）：1) 正標数有理二重点の普遍変形空間に定義されるある種のストラティフィケーション構造について研究を行い、一部のストラータ、等特異軌跡を決定し、系として標数が 3 以上の 3 次元標準特異点の分類、3 次元代数多様体の準ファイブレーションの構成を得た。2) 標数べき位数の切断を持つ楕円 K3 曲面の特徴付けを行い、標数が 3 以上の場合の分類、そのモジュライ空間の構成を与えた。4) ある種の代数曲線の自己積への野性的群作用による商特異点を調べ興味ある結果を得た。また、得られた一般型代数曲面の種々の不変量を与えた。5) Artin-Schreier 拡大塔を利用した新しい疑似乱数生成法（AST）を考案しその性質を調べた。

研究成果の概要（英文）：1) We studied stratifications inside the semi-universal deformations of rational double points, and determined some strata and equisingular loci of them. As a corollary, we gave a definition of canonical singularities in positive characteristic and gave a classification. 2) We characterized and classified elliptic K3 surfaces with p^n torsion sections, and gave a moduli space of such K3 surfaces. As a corollary, we checked the validity of Artin-Shioda conjecture and unirationality conjecture for these cases. 4) We explicitly calculated the resolution of quotient singularities arising from the diagonal wild action to the self-product of some algebraic curves. We also gave interesting sequence of algebraic surfaces of general type. 5) Using an explicit construction of Artin-Schreier towers, we invented the new method for generating pseudo-random numbers, which marked the good evaluations by standard test of pseudo-random number generators.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、正標数、楕円曲面、K3 曲面、Calabi-Yau 多様体、特異点、Mordell-Weil 格子、有限体、疑似乱数

1. 研究開始当初の背景

|

20 世紀中盤以降に確立した代数幾何学の現代的基礎付けにより任意標数の体や環上定義された代数多様体の幾何学の研究が大きく発展してきた。しかしながら、正標数の体上定義された代数多様体の研究においては、消滅定理の不成立に代表されるように標数 0 での標準的な議論がうまく機能しなかったり、Sard の補題の不成立に起因する病的ファイブレーションに代表される正標数特有の病理的現象の存在、また高次元特異点解消問題の未解決など多くの困難が生ずる。正標数代数多様体の研究においては、このような病理的現象の統一的解明や特異点理論の整備、その上で標数 0 で成り立つ様々な理論の類似理論の構築、もしくはより一般的枠組での理論構築が課題となる。

一方、不定方程式の解を多様体の有理点として捉えるという数論的動機付けによる代数多様体の研究においても正標数代数多様体は、標数 0 からの還元、数論的多様体との類似としての関数体上定義された代数多様体等の視点から重要な研究対象と考えられる。

また、近年の有限体上定義された代数多様体の工学分野、特に公開鍵暗号系や代数的符号理論等への応用としての視点からも正標数の代数幾何学の研究の重要性は増している。

2. 研究の目的

上の様な背景のもと、本研究の目的は、正標数の体上定義された代数多様体の幾何学、特にその病理的現象や特異点理論に関わる諸問題の解決を試みること、及び代数多様体の数論的性質を正標数の代数幾何学研究の立場から解明することである。また、暗号理論や符号理論への応用も視野に入れ、その為に要請される数学的課題としての代数多様体研究も本研究の目的の一部と考える。

具体的に次の 5 項目が中心的課題である。

- (1) 病理的現象を中心とした正標数の特異点理論の整備。
- (2) 正標数の楕円(準楕円)曲面の数論的及び幾何学的研究。
- (3) 正標数 Calabi-Yau 多様体の標数 0 への持ち上げ可能性に関する研究。
- (4) 標数 0 を含む K3 曲面の数論的動機付け、及び正標数幾何学からの研究。
- (5) 代数多様体の符号理論、暗号理論への応用、及びそこから派生する代数幾何学的問題の解決。

3. 研究の方法

全体として平成 19 年度終了の科学研究費基盤(C)での研究課題において得られた研究からの継続性を重視し研究を進めた。

上述(1)、(2)、(3)、(4)の中心的課題を研究するために以下の 5 項目に関して研究を行った。

- ① 2次元単純特異点の半普遍変形空間内におけるある種の部分空間、即ち、等特異点軌跡と呼ばれる空間の定義とその完全分類。
- ② 3次元非正規特異点における種々の病理現象の解明、また3次元標準特異点の定義と分類、及びその性質の研究。
- ③ 非特異3次元多様体に定義される2次元準ファイブレーション構造の統一的構成、及びその背後にある数学的原因の追及。
- ④ 標数のべき位数の切断を持つ楕円 K3 曲面の分類と構成、及びそのモジュライ空間の構成。また、関連する場合における Artin-塩田予想、単有理予想の解決。
- ⑤ 野性的群作用により得られる商特異点の構成と、その分類および一般論構築の可能性の追求。特に野性的 McKay 対応の考察。

これらに加え、目的(5)にある応用的研究として次の項目に関し研究を行う。

- ⑥ Artin-Schreier 拡大の詳細な研究を行い、拡大塔の構成とその応用としての疑似乱数生成法の考案と実装。

4. 研究成果

上述の項目に従って述べる。

- ① 2次元単純特異点、即ちいわゆる ADE 特異点に関して、正標数ではその半普遍変形空間内において、Tjurina 数によるストラティフィケーション構造が入ることがわかった。最も中心に近いストラティフィケーションにはさらに、等特異軌跡と呼ばれる空間があり、Tjurina 数により定義されるストラティフィケーション構造の先頭のスラータと等特異点軌跡に関して多くの計算を行った。等特異点軌跡に関しては、全ての標数及び任意次元単純特異点に対して定義方程式、次元の決定を行った(学会発表[3][4][9][10]、雑誌論文[6][5])。ま

た、Tjurina 数によるストラティフィケーション構造に関しては現在も研究継続中で有り、標数が3以上の場合については決定され論文として現在投稿中である。

- ② これは過去の研究において持ち上げ不可能 Calabi-Yau 多様体を構成する際に現れた、正標数3次元特異点として非常に特徴的な特異点をより一般の枠組みでとらえようとした研究である。3次元多様体内での1次元特異軌跡であり全空間の超平面切断を行うと有理2重点となるが、全体としてはそのような有理2重点の局所自明な変形ではないものが存在する。そのような非正規特異点は正標数3次元多様体における標準特異点となるべきものであるが、我々はその定義を与え、標数が3以上の場合において分類を行った(雑誌論文[6]及び投稿中論文)。標数が2の場合の研究は現在進行中である。
- ③ 2次元単純特異点の半普遍変形空間内における等特異軌跡空間の分類から得られる系として、3次元代数多様体における準ファイブレーションは本質的にそのような空間へのモジュライ写像の引き戻しで得られることが期待される。モジュライ写像の普遍性に関しては未だ証明できていないが、既存の準ファイブレーションは全て上述の等特異点軌跡から得られることを示した(雑誌論文[6]、学会発表[3][4][9][10])。
- ④ 楕円 K3 曲面における標数のべき位数の切断は、標数零の場合とは異なり、モジュライ空間的立場からは無限位数の切断のように振る舞うことが経験的にわかっている。本研究では楕円 K3 曲面の場合に、そのような曲面が Igusa モジュラー曲線の Neron モデルより Frobenius 基底変換で得られることを証明し、標数が3以上の場合にそのような曲面を全て分類し、そのモジュライ空間を記述した。特にそのモジュライ空間の記述に当たっては、有理二重点の普遍変形族より得られることが示され、ある種の K3 曲面のモジュライ空間と特異点の普遍変形空間との興味深い関係が見いだされた。また、標数べき位数の切断を持つ楕円 K3 曲面に関し、特徴付けを行うことにより、それらの曲面について Artin-塩田予想、単有理予想が肯定的に確かめられた(雑誌論文[2]、学会発表[5][6][7][8])。
- ⑤ 野性的群作用による商特異点の一般

論を追求するべく、ある種の代数曲線の自己積への対角的な野生的群作用を考察し、その特異点を詳細に調べることにより興味ある特異点系列を見いだした。また、得られた曲面の種々の不変量を計算することにより一般型代数曲面の無限系列を構成した。

- ⑥ Artin-Schreier 拡大をし続けて得られる塔を構成する具体的(アルゴリズム的)方法を与えた。その構成に用いられた再帰的構成可能な行列に関し、その位数を予想し、そのバウンドを与えた。また、この行列を用いて有限オートマトンを構成し、松本等による TGFSR(Twisted Generalized Feedback Shift Register)の方法を応用することにより、新しい疑似乱数生成法を考案した。これは、松本等によるメルセンヌツイスターと異なり、計算資源が許す限り任意に大きな周期の疑似乱数が制せ可能で有り、疑似乱数生成法の標準的テストである TestU01 での成績もきわめて好調である結果を得た。均等分布性に関する性質を現在研究中であり、同時に実装に際した計算時間の短縮のためのアルゴリズム研究を行っている(雑誌論文[3][4])。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1. Hiroyuki Ito and Stefan Schoefer, Wildly ramified actions and surfaces of general type arising from Artin-Schreier curves, 査読有り, Geometry and Arithmetic (in honor of Gerald van der Geer), 掲載予定, 2012.
2. Hiroyuki Ito and Christian Liedtke, Elliptic K3 surfaces with pn -torsion sections in characteristic p , 査読有, Journal of Algebraic Geometryに掲載決定, 2012年.
3. Huiling Song, Hiroyuki Ito and Yukinori Kitadai, A pseudorandom number generator using an Artin-Schreier tower, 査読有, SUT Journal of Mathematics, Vol. 47, No. 1, 73-90, 2011.
4. Hiroyuki Ito, Takeshi Kajiwara and Huiling Song, A Tower of Artin-Schreier extensions of finite fields and its applications, 査読有, JP Journal of Algebra, Vol. 22, No. 2, 111-125, 2011.

5. Hiroyuki Ito, Deformation of a singularity of type E_8 and Mordell-Weil lattices in characteristic 2, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, vol. 283, 1037-1053, 2010.
6. Masayuki Hirokado, Hiroyuki Ito and Natsuo Saito, Calabi-Yau threefolds arising from fiber products of rational quasi-elliptic surfaces, II, *Manuscripta Mathematica*, 査読有, Vol. 125, 325-343, 2008.
9. Hiroyuki Ito, Equisingular loci of simple singularities in positive characteristic, 1st PRIMA Congress (Pacific Rim Mathematical Association Congress), 2009年7月7日, University of New South Wales, Sydney, Australia
10. Hiroyuki Ito, Equisingular loci of simple singularities in positive characteristic, Algebraic Geometry in Positive Characteristics and Related Topics, 2008年11月6日, Nagoya University, Japan

[学会発表] (計 10 件)

1. Hiroyuki Ito, Wild group actions and surfaces of general type arising from Artin-Schreier type curves, Workshop on Algebraic Geometry, 2011年9月7日, 法政大学理工学部
2. Hiroyuki Ito, Wildly ramified action and surfaces of general type arising from Artin-Schreier curves, Workshop on Algebraic Geometry in Positive Characteristic, 2011年5月27日, KIAS (Korean Institute for Advanced Studies), Seoul, Korea
3. Hiroyuki Ito, Equisingular loci of simple singularities in positive characteristic, 第6回アフィン代数幾何学研究集会, 2010年9月2日, 関西学院大学梅田キャンパス
4. Hiroyuki Ito, Equisingular loci of simple singularities in positive characteristic, Tsuda Colledge Workshop on Number Theory, Geometry and Physics at the Crossroads, 2010年8月30日, 津田塾大学
5. Hiroyuki Ito, 正標数の楕円K3曲面の数論と幾何, 第55回代数学シンポジウム, 2010年8月10日, 北海道大学
6. Hiroyuki Ito, Classification of elliptic K3 surfaces with p^n torsion sections in characteristic p , Workshop on elliptic fibrations and K3 surfaces, 2010年7月15日, Humboldt University, ドイツ
7. Hiroyuki Ito, Elliptic K3 surfaces with p^n torsion sections in characteristic p , Algebraic Geometry in Characteristic p and Related Topics, 2010年2月11日, 東京大学数理科学研究科
8. Hiroyuki Ito, Elliptic K3 surfaces with p^n torsion sections in characteristic p , 正標数代数幾何学シンポジウム, 2009年12月18日, 法政大学理工学部

[その他]

ホームページ

<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 浩行 (ITO HIROYUKI)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号: 60232469

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

廣門 正行 (HIROKADO MASAYUKI)
広島市立大学・大学院情報科学研究科・講師
研究者番号: 40316138

齋藤 夏雄 (SAITO NATSUO)
広島市立大学・大学院情報科学研究科・講師
研究者番号: 70382372