

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：16401
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2008～2011
 課題番号：20540045
 研究課題名（和文） 偏極多様体の断面幾何種数による随伴束の大域切断の次元に関する研究
 研究課題名（英文） A study on the dimension of global sections of adjoint bundles of polarized manifolds by the sectional geometric genus
 研究代表者
 福間 慶明 (FUKUMA YOSHIAKI)
 高知大学・教育研究部自然科学系・教授
 研究者番号：20301319

研究成果の概要（和文）： X を複素数体上で定義された n 次元非特異射影多様体， L を X 上の豊富な因子とする．このとき (X, L) を偏極多様体と呼ぶ． $n=4$ かつ随伴束 K_X+L がネフとなるどんな偏極多様体 (X, L) に対しても， $m(K_X+L)$ が大域切断を持つような正整数 m を調べ， m が3以上の任意の整数の時には， $m(K_X+L)$ が大域切断を持つことがわかった．さらにこの4次元における方法は n が11以下の場合についても適用できることがわかった．またこの方法で必要になるとと思われる偏極多様体の不変量に関する考察も行った．

研究成果の概要（英文）：Let X be a smooth projective variety of dimension n over the field of complex numbers and let L be an ample line bundle on X . Then we call this pair (X, L) a polarized manifold. In this investigation, we studied an integer m which satisfies the following property: for any 4-dimensional polarized manifolds (X, L) whose adjoint bundle K_X+L is nef, $m(K_X+L)$ has a global section. We proved that if m is greater than or equal to 3, then $m(K_X+L)$ has a global section. Furthermore we proved that we can apply this method to the case where n is less than or equal to 11. We also studied some invariants of polarized manifolds. These results will be useful for the study of the dimension of global sections of adjoint bundles.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：偏極多様体・豊富な因子・随伴束・断面幾何種数

1. 研究開始当初の背景

X を複素数体上で定義された n 次元非特異射影多様体， L を X 上の豊富な因子とする．この時 (X, L) を偏極多様体と呼ぶ．偏極多様体に

関して次の予想がある．

予想(Beltrametti-Sommese) $K_X+(n-1)L$ がネフであるとする．このとき $h^0(K_X+(n-1)L) > 0$ が成り立つ(以下これをBS予想と呼ぶ)．BS

予想については n が 2 以下のときには成り立つことが昔からわかっていたが、私は以前 3 次元の場合の BS 予想を肯定的に解決することに成功した。またさらに $n=3$ のとき $h^0(K_X+2L)=1$ となる (X, L) の分類にも成功した。この BS 予想が提出された後、この予想より強い予想として次が提出された。

予想 (Ambro-川又) (X, A) を偏極多様体とする。もし K_X+A がネフであるならば、 $h^0(K_X+A) > 0$ が成り立つ (以下これを AK 予想と呼ぶ)。この予想については次の (AK1) から (AK4) の場合は成り立つことが知られていた: (AK1) n が 2 以下のとき. (AK2)

(Chen-Hacon) $n=3$ で X の不正則数が正のとき. (AK3) (Xie) $n=3$, $-K_X$ がネフのとき. (AK4) (福間) $n=3$, X の小平次元が非負のとき.

さてここで K_X+L がネフなら K_X+L の飯高次元は非負である。この事実のもと、この AK 予想をさらに発展させることで、次のような量を考えた。 $M_n = \{r : \text{自然数} \mid K_X+L \text{ の飯高次元が非負となる任意の } n \text{ 次元偏極多様体 } (X, L) \text{ に対して } h^0(r(K_X+L)) > 0\}$, $M_n^{\text{NEF}} = \{r : \text{自然数} \mid K_X+L \text{ がネフとなる任意の } n \text{ 次元偏極多様体 } (X, L) \text{ に対して } h^0(r(K_X+L)) > 0\}$ とし、さらに $m(n) := \min M_n$, $m^{\text{NEF}}(n) := \min M_n^{\text{NEF}}$ とおく。ただし M_n (resp. M_n^{NEF}) が空集合なら $m(n) = \infty$ (resp. $m^{\text{NEF}}(n) = \infty$) とする。ここで BS 予想, AK 予想と $m(n)$, $m^{\text{NEF}}(n)$ の関係について述べる。(R1) AK 予想が正しいなら BS 予想も正しい。(R2) $m(n) \geq m^{\text{NEF}}(n)$ が成立。(R3) AK 予想が正しいことと $m^{\text{NEF}}(n) = 1$ は同値。これよりわかることは $m(n)$ や $m^{\text{NEF}}(n)$ の値を調べることで随伴束の大域切断の様子がわかるだけでなく、BS 予想や AK 予想についてもわかるということである。

2. 研究の目的

$m(3)$, $m^{\text{NEF}}(3)$ の値をもとめる。さらに $m(4)$, $m^{\text{NEF}}(4)$ の値をもとめる。もし値が決定できない場合にはこれらの上限について考える。またこれらに関連して偏極多様体のいくつかの不変量を用いた分類をこころみる。

3. 研究の方法

偏極多様体の多重随伴束の大域切断のなす次元は、多重偏極多様体の断面幾何種数と多様体の構造層のなすコホモロジーの次元を使って書き表すことができる。その式から多重偏極多様体の断面幾何種数の値を詳しく調べることにより多重随伴束の大域切断のなす次元の値の下限を求めることができることがわかる。そこで本研究では多重偏極多様体の断面幾何種数の性質の解明を進め、得られた結果をもとに多重随伴束の大

域切断のなす次元について考察するという方法を用いる。

4. 研究成果

X を複素数体上で定義された n 次元非特異射影多様体, K_X を X の標準因子, L を X 上の因子とする。

(1) 私の以前の研究で $n=3$ に対して $m(3)$ と $m^{\text{NEF}}(3)$ の値がともに 2 以下になることはわかっていたが、今回の研究課題期間中に H\"oring により $m(3)$ と $m^{\text{NEF}}(3)$ の値が 1 になることが示された。そこで次のステップとして $n=4$ の場合を考察した。

① $n=4$ かつ L が豊富な因子で、さらに随伴束 $K+L$ がネフとなるときに、 $m(K+L)$ が大域切断を持つような正整数 m を調べ、 m が 3 以上の任意の整数の時には、 $m(K+L)$ が大域切断を持つことがわかった。さらに X がある種の特異点を持つ場合についても調べることで、 $K+L$ の飯高次元が非負であるときに、 m が 6 以上の任意の偶数に対して $m(K+L)$ が大域切断を持つこともわかった。

② ①の研究のうち、 $K+L$ がネフとなるときに、 $m(K+L)$ が大域切断を持つような正整数 m を調べる方法は n が 11 以下の場合についても適用できることがわかった。

(2) $n=3$ のとき、 $h^0(K_X+2L)$ が 0 もしくは 1 になる (X, L) の分類は知られていたが、 $h^0(K_X+2L)=2$ なる (X, L) の分類も最終的に完成した。また K_X+L の飯高次元が 0 以上のとき、 $h^0(K_X+2L)=3$ となる (X, L) の分類も出来た。

(3) X が 2 次元、 L がネフかつ巨大であり、さらに L の大域切断のなす次元が 1 以上であるとき準偏極曲面 (X, L) の断面種数 $g(X, L)$ は X の不正則数 $q(X)$ 以上であることが以前に証明されていた。さらに L の大域切断のなす次元が 2 以上であるときは、 $g(X, L) = q(X)$ となる (X, L) の分類がすでになされている。今回の研究で、 L がネフかつ巨大でありかつ L の大域切断のなす次元が 1 であるという条件のもと $g(X, L) = q(X)$ となる (X, L) を分類することに成功した。

(4) $n=3$ かつ L がネフかつ巨大であるとき次の結果を得ることができた。

「 K_X+2L の飯高次元が 0 以上であることと $h^0(K_X+2L) > 0$ であることは同値である。」これは L が豊富な因子のとき Beltrametti と Sommese により提出された予想のネフかつ巨大版としてとらえることができる。さらに

$h^0(K_X+2L)$ の値が0もしくは1となる3次元準偏極多様体 (X, L) についての分類もおこなった。

(5) L がネフかつ巨大であり、 L の大域切断の次元が3以上であるという条件のもと断面種数 $g(X, L)$ と X の不正則数 $q(X)$ が等しくなる (X, L) について分類をおこなった。

(6) L が大域切断で生成されているとき、偏極多様体 (X, L) の不変量である第2断面Betti種数 $b_2(X, L)$ と第2 Betti 数 $b_2(X)$ との間には Lefschetz の定理から $b_2(X, L)$ は $b_2(X)$ 以上であることが成り立つことがわかる。これに関して先行研究で $b_2(X, L)=b_2(X)$ なる (X, L) の分類が得られていた。この度の研究により $b_2(X, L)=b_2(X)+1$ なる (X, L) の分類に成功した。

(7) 偏極多様体の不変量である第 i 断面幾何種数 $g_i(X, L)$ と第 i Δ -種数 $\Delta_i(X, L)$ の応用の一つとして随伴束 $K_X+(n-i)L$ が自明となるような (X, L) の特徴付けについて考えた。 $i=1$ のときは藤田隆夫により $K_X+(n-1)L$ が自明であるための必要十分条件は $\Delta_1(X, L)=1$ かつ $g_1(X, L)=1$ であることが示されている。そこで i が2以上のとき $K_X+(n-i)L$ が自明となる (X, L) がどのように特徴づけられるかについて考え、次の①, ②, ③が同値であると予想した(以下で L^n は L の次数を表す):

- ① $K_X+(n-i)L$ は自明である。
 - ② $\Delta_i(X, L)=1$ かつ $2g_i(X, L)-2=(i-1)L^n$ 。
 - ③ $g_i(X, L)=1$ かつ $2g_i(X, L)-2=(i-1)L^n$ 。
- この予想について次の3つの場合は正しいことがわかった。
- i が $\dim Bs|L|+2$ 以上のとき (ただし $Bs|L|$ は完備線型系 $|L|$ の基点集合を表す)。
 - $i=2$ のとき。
 - $i=3$ かつ n が5以上のとき。

(8) 0以上 n 以下の任意の整数 i に対して (X, L) の第 i 断面クラスなる不変量を定義した。これは射影多様体に対して定義されるクラスという不変量の偏極多様体版といえるものである。この不変量による偏極多様体の分類についていくつか行った。また、これに関する興味深い問題も提起した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

① 福間 慶明, A numerical characterization of polarized manifolds (X, L) with $K_X=-(n-i)L$ by the i th sectional geometric genus and the i th Δ -genus, 査読有, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 48 (2012), 83-106. DOI:10.2977/PRIMS/62

② 福間 慶明, Invariants of ample vector bundles on smooth projective varieties, Riv. Mat. Univ. Parma, 査読有, 2 (2011), 273-297.

<http://www.math.unipr.it/~rivista/dati/2011-2-2/indice.html>

③ 福間 慶明, A lower bound for the second sectional geometric genus of quasi-polarized manifolds and its applications, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 査読有, 69 (2011) 73-90. <http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/69-1/73.pdf>

④ 福間 慶明, A study on the dimension of global sections of adjoint bundles for polarized manifolds, II, Hokkaido Math. J. 査読有, 40 (2011) 251-277.

<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&page=toc&handle=euclid.hokmj/1310042825>

⑤ 福間 慶明, On quasi-polarized manifolds whose sectional genus is equal to the irregularity, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 査読有, 125 (2011), 107-117. <http://rendiconti.math.unipd.it/volumes/vol125.php?lan=english>

⑥ 福間 慶明, Effective non-vanishing of global sections of multiple adjoint bundles for polarized 3-folds, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, 215 (2011), 168-184.

DOI:10.1016/j.jpaa.2010.04.011

⑦ 福間 慶明, A note on quasi-polarized surfaces of general type whose sectional genus is equal to the irregularity, Le Matematiche, 査読有, 65 (2010), 155-161. <http://www.dmi.unict.it/ojs/index.php/lematematiche/article/view/786>

[学会発表] (計 8 件)

- ① 福間 慶明, 3 次元偏極多様体 (X, L) の $h^0(K_X + 2L)$ の値による分類について, 代数幾何目白セミナー, 平成 23 年 12 月 27 日, 学習院大学 (東京都)
- ② 福間 慶明, Sectional class of ample line bundles on smooth projective varieties, 津山代数幾何シンポジウム 2011, 平成 23 年 7 月 27 日, 津山高専 (岡山県)
- ③ 福間 慶明, On effective non-vanishing of multiple adjoint line bundles, 代数幾何学シンポジウム-佐渡-, 平成 23 年 6 月 3 日, 佐渡島開発総合センター (新潟県)
- ④ 福間 慶明, 4 次元偏極多様体における多重随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成 22 年 9 月 24 日, 名古屋大学 (愛知県)
- ⑤ 福間 慶明, 3 次元準偏極多様体におけるある随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成 22 年 3 月 24 日, 慶應義塾大学 (神奈川県)
- ⑥ 福間 慶明, 3 次元偏極多様体における多重随伴束の大域切断のなす次元について, 日本数学会, 平成 21 年 9 月 26 日, 大阪大学 (大阪府)
- ⑦ 福間 慶明, 随伴束が自明となる偏極多様体の不変量による特徴づけについて, 日本数学会, 平成 20 年 9 月 25 日, 東京工業大学 (東京都)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :

取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福間 慶明 (FUKUMA YOSHIAKI)
高知大学・教育研究部自然科学系・教授
研究者番号 : 20301319

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :