

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月31日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008 ～ 2011

課題番号：20540046

研究課題名（和文） 非可換代数幾何学の大域的な問題の研究

研究課題名（英文） Studies on global problems on non commutative algebraic geometry

研究代表者

土基 善文 (Yoshifumi Tsuchimoto)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授

研究者番号：10271090

研究成果の概要（和文）：

アフィン空間上のシンプレクティック多項式自己写像について、研究代表者はアフィン空間上にある加群の層を定義した。それが自明であることが多項式写像のワイル環の環自己準同型へのリフトの存在と同値である。次に、反射的加群の挙動に関する阿部-吉永の定理を用いて、無限遠超平面でのある種の反射的加群の特異性の有無が、件の加群の層の自明性を分ける不変量であることを示した。これは非可換代数幾何学に射影空間のような「コンパクト」な空間の議論を関係付けられることを示唆している。

研究成果の概要（英文）：

For any symplectic polynomial endomorphism of an affine space, the representative defined a sheaf on the affine space. Its triviality is equivalent to the existence of a lift of the map to an Endomorphism of a Weyl algebra. Next we have used the theory of Abe-Yoshinaga on a behavior of reflexive sheaves on the hyperplane at infinity and obtained a result which says that the absence of the singularity on the infinity implies an existence of a 'quantization' of a symplectic endomorphism of an affine space. This gives an evidence of effectiveness of ordinary commutative algebraic geometry of 'compact' spaces such as projective spaces in dealing with non commutative objects.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：非可換代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：非可換代数幾何学、射影幾何学、射影的加群、Dixmier 予想、Jacobian 問題

1. 研究開始当初の背景

非可換代数幾何学において、正標数の議論を援用し、そのあと適当な極限をとるという技法は、研究が盛んになって来ていた。たとえ

ば、ドイツの Arbeitstagung 2005 における Kontsevich の口頭発表では、研究代表者の結果が引用されている。また、Dixmier 予想と Jacobian 問題のつながりとも関係するため、Kontsevich らによる論文 などにも研

究代表者の結果が引用された。その後 V. Bavula 氏が複数のプレプリントに研究代表者の論文を引用するなど、動きが活発になっていた。

2. 研究の目的

大局的には、非可換幾何学において、大域的な構造を目に見えるがごとくに扱えるようにする。ということに尽きる。とくに、ひとつの問題をいろいろな方向で見ることで、いくつかの手法を獲得したい。正標数への還元と、そこからの超フィルターによる復帰はそのなかの有力な手法である。正標数の世界と日常世界とはすこしずれてはいるが、その代償として考えている環が分解するのは十分に魅力的であって、その分野はとくに念入りに見てみたい。また、正標数の他の魅力として、2つの非可換対象を貼り合わせるができるという点がある。そのような点の有利さの実証のため、射影空間などの考察が非可換幾何学の研究にどの程度有効なのか見てみたい。

3. 研究の方法

ヤコビアン問題をひとつのガイド問題とし、それを解決することを目標に据えることでさまざまな問題意識を明らかにし、非可換代数幾何学における手法を豊かにする。具体的には、とくに研究目的の項でも述べた正標数の世界への還元と超フィルターの使用による帰還がひとつの主題的な手法となり、その手法をもちいて非可換幾何学的な対象の貼り合わせ、無限遠点での挙動、層の理論の概観などができるとを期待し、それによってガイド問題がどの程度解決するかを吟味する。その他、研究代表者の NAS を始めとするカテゴリカルな扱いや、表現論、数論的な考察を交えて、非可換現象をできるだけ詳細にみつめる。

4. 研究成果

i) ワイル環の環自己準同型がアフィン空間のシンプレクティック多項式自己写像を与えることは研究代表者らによって既知であったが、その逆の問題、すなわちアフィン空間上のシンプレクティック多項式自己写像 f がワイル環の環自己準同型(“リフト”)を与えるかについては、Kontsevich が問題としていたが未だ解決していない。研究代表者はこの問題について本研究課題の主題に基づいてまず正標数の世界で考察した。そこで f に付随する反射的層 W_f をアフィン空間上に定義し、この反射的層が自明であることが f が “リフト” をもつことと同値である事

を証明した。この層は本質的にはゲージ変換のなす層であり、その自明性とは要するに大域的なゲージ変換の存在を意味する。したがって、大域的なゲージ変換さえ存在すれば、“リフト”が存在するということである。さらに、そのような層が反射的層の理論を通じて解明できる可能性について言及した。このような反射的層についてはすでに非可換環論の立場からは Stafford 氏らが詳細に調べていて、他方で標数 0 で “自由な” 層については Calogero-Moser 空間と呼ばれる空間で分類できることが Berest 氏や Wilson 氏によって研究されているが、さらなる研究が代数幾何学的にも可能で、しかも将来的にも必要であると思われる。そのような可能性を指摘した。

ii) 上述の反射的層について、研究代表者はさらに射影空間への延長を観察することにした。その結果、そのような層は必ず反射的な延長をもち、それは Serre ツイストを除いて一意であることがわかった。さらに、阿部-吉永の射影空間上の反射的層についての結果を用いることにより、われわれの懸案の層が無限遠点で局所自由な延長をもつこと、それが自明であることが同値である事、したがってその “特異性” を観察することにより “リフト” の存在の有無が議論できることを示した。射影空間のようなアファインでない空間については、他者の研究においてはカテゴリ論を駆使し、通常の数論的考察の “アナログ” をひとつひとつ証明するという手法がよく用いられており、実際我々の研究と同様なものが(平面の場合において) Berest 氏などの研究でなされている。しかし我々の研究では代数幾何学的手法をアナロジーではなくそのまま用いることができるので、阿部-吉永の定理のような結果をスムーズに用いることができたのであった。このような結果はさらなる研究の道標になるものと期待している。

iii) 菊地による表現論的な研究は、研究代表者のアイディアの下地となり、正標数での考察の下支えとなった。具体的には、群作用に関する不変微分作用素の研究が研究集会において菊地により語られた。その際の現象は、微分作用素の非可換性の扱い方を大変示唆的に表しており、研究代表者の研究に方向性と勇気を与えるものであった。その他の先生方の研究も、(もちろんそれ自身申し分なく美しく、豊富であるが)非可換な世界の豊富さの傍証としても大変魅力的な結果であった。これらについてはすべてが理解されたと言うよりは、むしろ新しい考え方の源泉が溢れているような状況だと認識している。たとえば連携協力者である石井の研究は、非

可換現象、導来圏、表現論などが入り交じっており、大変興味深い。また、高知大学大学院生の黒岩朝さんの結果も、現在はまだ数論の入り口に位置するような結果だが、非可換現象の萌芽がみられ、大変興味深い。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. Y. Tsuchimoto, Norm based extension of reflexive modules over Weyl algebras, Tohoku J. Math., 64(1), 61-77, 2012(査読有)

2. Y. Tsuchimoto, Reflexive modules of rank one over Weyl algebras of non-zero characteristics, Kyushu J. Math., 65(2), 279-298, 2011(査読有)

3. T. Dotera and J. Matsuzawa, Hyperbolic Tiling on the Gyroid Surface in a Polymeric Alloy, 準周期秩序の数理, 数理解析研究所講究録 1725, 80-91, 2011(査読有)

4. T. Mochizuki, The third cohomology groups of dihedral quandles, J. Knot Theory Ramifications, 20(7), 1041-1057, 2011(査読有)

5. T. Mochizuki, The Stokes structure of a good meromorphic flat bundle, J. Inst. Math., Jussieu, 10(3), 675-712, 2011(査読有)

6. 菊地克彦, 「階数 4 の multiplicity-free 作用に関する不変式」, 表現論と非可換調和解析における新しい視点(京都大学数理解析研究所講究録別冊), B20, 71-93, 2010(査読有)

7. Takuro Mochizuki, Note on the Stokes structure of Fourier transform, Acta Math. Vietnam, 35, 107-158, 2010(査読有)

8. J. Matsuzawa and M. Takahashi, Representations of the normalizers of maximal tori of simple Lie groups, Tsukuba J. Math., 33(2), 189-237, 2009(査読有)

9. T. Mochizuki, On Deligne-Malgrange lattices, resolution of turning points and harmonic bundles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 59(7), 2819-2837, 2009(査読有)

10. T. Mochizuki, Good formal structure for meromorphic flat connections on smooth projective surfaces (in: Algebraic analysis and around) Adv. Stud. Pure Math., 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 223-253, 2009(査読有)

11. T. Mochizuki, Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles. II. Geom. Topol., 13(1), 359-455. 2009(査読有)

12. 菊地克彦, 階数 3 の multiplicity-free 作用に関する不変式と不変微分作用素, Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B7, 101-120, 2008(査読有)

[学会発表] (計 8 件)

1. 石井亮, "Special McKay correspondence and exceptional collections", Complex

Algebraic Geometry, 2011/9,
 Mathematisches Forschungsinstitut
 Oberwolfach, Germany, 招待講演

2. 吉富賢太郎, ラングランズ哲学入門, 非
 可換代数幾何学の大域的問題とその周辺,
 高知小研究集会, 2010/12, 高知大学

3. 望月拓郎, From Hodge toward Twistor,
 非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺,
 高知小研究集会, 2010/12, 高知大学

4. 土基善文, ワイル代数の階数 1 の反射的
 加群の「しわ」について, 日本数学会 2010
 年度周期総合分科会、2010/9, 名古屋大学

5. 石井亮, Geometry and Algebra of
 Orbifolds and the McKay Correspondence,
 2010/8, Warwick University, 招待講演

6. 菊池克彦, Invariants for
 multiplicity-free actions and spherical
 harmonics, 非可換代数幾何学の大域的問題
 とその周辺, 高知小研究集会, 2009/12, 高
 知大学

[図書](1件)

1. Takuro Mochizuki,
 Donaldson type invariants for algebraic
 surfaces,
 Lecture Notes in Mathematics, 1972
 Springer,
 2009 (査読有)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土基 善文 (Yoshifumi Tsuchimoto)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
 研究者番号: 10271090

(2) 研究分担者

松澤 淳一 (Jun'ichi Matsuzawa)
 奈良女子大学・理学部・教授
 研究者番号: 00212217

吉富 賢太郎 (Kentaro Yoshitomi)
 大阪府立大学・総合教育研究機構・講師
 研究者番号: 10305609

菊池 克彦 (Katsuhiko Kikuchi)
 京都大学・大学院理学研究科・助教
 研究者番号: 50283586

望月 拓郎 (Takuro Mochizuki)
 京都大学・数理解析研究所・准教授
 研究者番号: 10315971

(3) 連携研究者

石井 亮 (Akira Ishii)
 広島大学・理学研究科・准教授
 研究者番号: 10252420

(4) 研究協力者:

黒岩 朝 (Hajime Kuroiwa)
 高知大学・総合人間自然科学研究科 (博士
 課程)

参考論文:

Hajime, Kuroiwa,
 A family of entire functions which
 determine the splitting behavior
 of polynomials, Hiroshima Math. J. 41
 (2011), no. 3, 409-414.