

機関番号：32665

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540050

研究課題名 (和文) 特異点論における正標数の手法

研究課題名 (英文) Characteristic p method in singularity theory

研究代表者

渡辺 敬一 (WATANABE KEICHI)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：10087083

研究成果の概要 (和文)：

代数幾何学の、特に極小モデル理論に現れる特異点を正標数の手法を用いて解析した。具体的には、1. F-threshold の概念を用いて特異点のイデアルの重複度に関する不等式の予想し、いくつかの場合にそれを証明した。2. 正規射影多様体から与えられた a 不変量を持つ Gorenstein 次数付き環が豊富にできることを示した。3. 多重次数付き環からできる環を研究し、有理特異点となるための条件を与え、因子群に関する新しい例を構成した。

研究成果の概要 (英文)：

We investigated the property of singularities appearing in the minimal model theory in algebraic geometry. Specifically, we got the following results. 1. We introduced the notion of F-thresholds of pair of ideals and got a conjecture concerning F-threshold and multiplicity of ideals. We proved the conjecture in some important cases. 2. We gave a procedure to construct (quasi) Gorenstein graded rings with given a -invariant from normal projective varieties. 3. We investigated diagonal subalgebras of multi-graded rings and gave a criterion for such rings to be rational singularity. We also gave a new example concerning theory of divisor class groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学, 特異点論, 可換環論, 代数幾何学, Frobenius 写像

1. 研究開始当初の背景

標数 0 の体上の代数幾何学に現れる様々の特異点のうち、有理特異点、対数的端末 (log terminal) 特異点などの重要な特異点の族に対して、正標数の手法を用いた手法で特徴付けが得られることが、渡辺や原伸生な

どの研究によってわかっていた。また、原伸生、吉田健一、高木俊輔は密着閉包の一般化を定義する事により、乗数イデアル (multiplier ideal) の概念を一般化された密着閉包で記述できることを示した。

これにより、標数 0 の体上の代数幾何学

の log-canonical (以下 lc と略記) 閾値が, 正標数の手法での F-pure 閾値となることも示された.

De Fernex-Ein-Mustata は lc 閾値による正則環上の重複度の下限を与えていた.

Mustata-高木-渡辺はこの概念を一般化し, 正標数の環のイデアルの組に対して, F-閾値 (F-threshold) の概念を創設した. この概念を導入することにより, 上記の重複度の不等式を一般化, 相対化する「重複度予想」が生まれた.

2. 研究の目的

本研究は正標数の手法を用いて, 特異点 (即ち, その点の局所環), の性質を調べることが目的であった. 個々の問題としては, 次のようなものである.

- ・ F-threshold の研究. その整閉包, 密着閉包, 重複度, 乗数イデアルとの関係.

この概念に関しては, 特に前述した de Fernex-Ein-Mustata の不等式を一般化かつ相対化した「重複度予想」が研究の中心的課題であった.

- ・ 正標数の手法を用いて定義される Hilbert-Kunz 重複度の性質や, 標数 0 の代数幾何学の「乗数イデアル」に対応する「一般化されたテストイデアル」の研究.
- ・ 特異点の大変重要な例である, 次数付き環は射影多様体と分数因子の組で表せる. 特に射影多様体 X を 1 つ与えたとき, $\text{Proj}(R) = X$ となる R をどの程度自由に作れるか?

等々の問題を考えた.

3. 研究の方法

数学の研究方法として, 研究協力者や, 研究連携者と議論をして, 問題点を深く追求したり, 新しい観点や新しい視点を発見するのが大変重要である.

また, 研究課題に挙げられている問題に対する最新の情報を得るために, いろいろな研究集会に参加して, 最新の情報を得たり, 研究成果を発表して聴衆の反応から新しい方向性を追求したりするのも大変重要である.

実際, 渡辺は 2008 年に Kansas 大学で, C. Huneke や連携研究者の高木俊輔と会合を持ち, F-threshold に関する大変重要な結果を得ている. また, 研究分担者の吉田健一と渡辺は日本大学や名古屋大学で何回も共同研究の機会を持っている. その他にも世界各地の研究集会で, 研究成果を発表すると共に最新の情報を得ている.

このように, この研究の費用の大部分が旅費に用いられている.

また, 最新の成果を調べるための図書費にも研究費が使われた.

なお, この研究において, 渡辺が主催し, 日本大学で定期的に行われている「特異点論月曜セミナー」(研究分担者の泊, 吉田, 連携研究者の蔵野, 高木もメンバーである)が本研究に大変重要な役割を果たしたことを追記しておきたい.

4. 研究成果

主たる研究成果は以下のものである.

- ・ 当初に述べた F-threshold の重複度予想に関して次数付き環の次数付きイデアルに対し, 肯定的な結果が得られた. この結果は前に Huneke-Mustata-高木-渡辺 [1] により Cohen-Macaulay 環に対して成立が示されていたが, この条件を外しても成り立つことが示された. これによって, 予想の元になった「正則」という仮定から全く一般の特異点に対してでも, 次数付きイデアルの任意の組に対して成立する事が示された.

また, 標数 0 の代数幾何学で, 乗数イデアルに関する「跳躍数」という概念があるが, F-threshold も「跳躍数」と解釈できる事が示された. これにより, 「重複度予想」がイデアルの「core」の概念に関する別の予想「巴系イデアル J が $\text{core}(I)$ を含めば I の重複度は J の重複度以上である」に帰着される事がわかった. ([7]; 以上は C. Huneke と高木俊輔との共同研究.)

- ・ 正標数の局所環において, 巴系イデアル J の整閉包が「一般化された密着閉包」で記述できることが示された. これにより, 「局所環 (A, m) において, m の s 乗に含まれる巴系イデアル」に対し, $J : m^s$ は J 上整である」という定理が大幅に改善された (吉田健一との共同研究; 投稿中).

- ・ 多重次数付き環の対角部分代数が F-有理となるための条件を与え, 局所コホモロジーの計算をある種の条件を満たす新しい射影多様体の構成に応用した (共同研究者の蔵野和彦, A. Singh, 佐藤栄一との共同研究).

- ・ 吉田は高木との共同研究で, 一般化されたテストイデアルの局所化との可換性などを研究し, 形式的べきの評価に応用することに成功した. また, Mustata との共同研究により, テストイデアルと乗数イデアルの性質の違いを明らかにした. また, 松田らと二項式で定義された超平面の F-threshold を計算した. この結果は F-thresholds の値を決定する際の指標を与えている.

・渡辺は、与えられた正規射影多様体 X に対して、 $\text{Proj}(R)=X$ となる quasi Gorenstein 正規環を構成し、また、 X の中間のコホモロジー群が 0 であるとき、 R を Gorenstein 環で取れることを示した。

また、与えられた a 不変量をもつ 2 次元の正規次数付き環の分類を a が 8 以下の場合に行った。これらの結果は投稿準備中である。

・泊は単純 $K3$ 特異点の新しい例を構成し、ある種の条件の下で、その特異点の特徴付けを与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① S. Ohnishi and K. Watanabe, Coefficient ideal of ideals generated by monomials, To appear in Communications in Algebra (2011). 査読有

② A. Sannai and K. Watanabe, F-signature of graded Gorenstein rings, J. Pure and Appl. Algebra. vol. 215 (2011), 2190-2195. 査読有

③ C. Huneke, S. Takagi, K. Watanabe, Multiplicity bounds in graded rings, Kyoto Journal of Mathematics, vol. 51, No. 1 (2011), 127-147. 査読有

④ K. Kurano, E. Sato and A. Singh. K. Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. of Algebra, vol. 322 (2009), 3248-3267. 査読有

⑤ M. Mustata and K. Yoshida, Test ideals vs. multiplier ideals, Nagoya Math. J. vol 193 (2009), 1-18. 査読有

⑥ C. Huneke, M. Mustata and S. Takagi, K. Watanabe, F-thresholds, tight closure, integral closure, and multiplicity bounds, Michigan Math. J. vol. 57 (2008), 463--483. 査読有

⑦ S. Takagi, K. Yoshida, Generalized test ideals and symbolic powers, Michigan Math. J. vol. 57 (2008), 711-724. 査読有

[学会発表] (計 11 件)

① K. Yoshida, K. Watanabe, A positive characteristic approach to Wang's theorem", 32nd Commutative Algebra Symposium, 6th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2010.12.6.

② K. Watanabe, A variant of Wang's Theorem in positive characteristic", "Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry". C. I. R. M., Luminy, France, 2010.11.5.

③ K. Watanabe, Some topics on F-thresholds", Workshop on Local Rings and Local Study of Algebraic Varieties, ICTP Trieste, 2010.6.7.

④ K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, "Frobenius splitting conference", Michigan University, Ann Arbor, 2010.5.18.

⑤ K. Watanabe, Some topics on F-thresholds, The 5-th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Hanoi, 2010.1.5.

⑥ K. Watanabe, The a invariants of normal graded Gorenstein rings and varieties with even canonical class, PASI 2009, Commutative Algebra and its connections to Geometry, Olinda, Brazil, 2009.8.14.

⑦ K. Watanabe, a -invariant of normal graded Gorenstein domains and varieties with even canonical class, 2009 PRIMA congress, University of New South Wales, Sydney. 2009.7.8.

⑧ K. Watanabe, a -invariant of normal graded Gorenstein domains and varieties with even canonical class, Kommutative Algebra, Oberwolfach, 2009.4.24.

⑨ K. Watanabe, Hilbert-Kunz multiplicities" (2 talks), Mini Workshop of Algebra, Taiwan National University, 2009.2.10, 11.

⑩ K. Watanabe, Classification of 2-dimensional normal graded hypersurfaces with small a -invariants, "Algebre commutative et ses interactions avec la geometrie algebrique", C. I. R. M., Luminy, France, 2008.10.1

⑪ K. Watanabe, Classification of

2-dimensional normal graded
hypersurfaces with small a -invariants,
2008.7.25, Algebra Workshop, Kansas Univ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡辺 敬一 (WATANABE KEIICHI)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：10087083

(2) 研究分担者

泊 昌孝 (TOMARI MASATAKA)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：60183878

吉田 健一 (YOSHIDA KENNICHI)

名古屋大学・多元数理研究科・准教授

研究者番号：80240802

(3) 連携研究者

福田 拓生 (FUKUDA TAKUO)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：00009599

(平成 20 年)

蔵野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188

高木 俊輔 (TAKAGI SHUNSUKE)

九州大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40380670