様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年　6 月　13 日現在

機関番号：10101
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2008～2011
課題番号：20540056
研究課題名：写像類群に関わる有界コホモロジーとシンプレクティック・トポロジー

研究課題名：bounded cohomology and symplectic topology around mapping class groups

研究代表者
神田　雄高（KANDA　YUTAKA）
北海道大学・大学院理学研究院・助教
研究者番号：30280861

研究成果の概要（和文）：曲面の写像類群の有界コホモロジーにかんする知見を得るべく、またすべての森田・マンフォード類は有界であろうという予想にアプローチするために、写像類群の有限次元表現について特にその像の大きさを上から評価する方法を研究した。またカンドルコホモロジーのレフシェッツ束への応用についての野坂武史の仕事から第１森田マンフォード類のグロモフ・ノルムについての評価を引き出す方法を研究した。

研究成果の概要（英文）：To investigate bounded cohomology of mapping class groups of compact surfaces and to show the boundedness of Morita-Mumford classes, I studied a certain class of finite dimensional representations of these groups, with special focus on estimating their range. Also I tried to apply Takefumi Nosaka' work, that on the interrelationship between quandle cohomology and Lefshetz fibrations over the sphere, to estimate the Gromov semi-norm of the 1st Morita-Mumford classes.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	８００，０００	２４０，０００	１,０４０，０００
２００９年度	７００，０００	２１０，０００	９４０，０００
２０１０年度	７００，０００	２１０，０００	９４０，０００
２０１１年度	７００，０００	２１０，０００	９４０，０００
年度			
総　計	２，９００，０００	８７０，０００	３，８６０，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：幾何学
キーワード：位相幾何学

１．研究開始当初の背景

G を群とする。G のコホモロジー群 H^*(G) の元 c について、c が有界コサイクルで表され得るか、またそうである場合, c のグロモフ･セミノルム(c を表すコサイクル達の L^∞ ノルムの下限）の値は何か、という問題は非常に興味深い。

本研究で主題とする群は種数 g が２以上の閉曲面Σ_g の写像類群 M_g である。写像類群とは曲面の（微分）同相群の連結成分のなす群である。曲面束の分類空間 BM_g の安定コホモロジーは森田マンフォード類で生成されることが知られている。一方、BM_g の有界コホモロジーについて知られていること

は少ない。
予想１. M_g の特性類である森田・Mumford 類はすべて有界コサイクルで表されるだろう(森田茂之による予想)。

森田・マンフォード類の位相幾何学的な定義は、曲面束の相対単位接束 ST について、そのオイラー類 e(ST)を冪乗してファイバー積分をとるというものである。ST がカノニカルな平坦 $Homeo(S^1)$束の構造をもつことから、$e(ST)^n$ は有界コサイクルで表現される。しかしファイバーの基本群がアメナブル（従順）でないので、そのファイバー積分が有界コサイクルになるかどうか直ぐには判らない。

ただし奇数番目の森田・マンフォード類が有界なのは古典的に良く知られている。曲面束の整係数１次コホモロジー群は、BM_g 上の構造群を Sp(2g;Z)とする平坦束を導く。これに同伴する実ベクトル束の特性類は有界コホモロジーの一般論から有界であるが、一方で族の指数定理によって森田・マンフォード類で書き下せ、その関係式から奇数番目の森田・マンフォード類の有界性が従う。特にこの構成から得られる１番目の森田・マンフォード類のコサイクルとしてマイヤー・コサイクルが知られている。

有界コホモロジーが非自明になりうる最低次数の次数は２である。これについては初等的でない双曲群 G の $H_{bdd}^2(G)$は無限次元になると知られている。一方、曲面の写像類群は階数が２以上の自由アーベル群を部分群として持つため双曲群ではない。しかし藤原-Bestvina によって $H_{bdd}^2(M_g)$が無限次元であると示された。これはカーブ複体と呼ばれる距離空間 K への M_g の作用から導かれる。カーブ複体 K は距離空間として双曲的であるとしられていて、M_g の元で K に双曲的に作用するものごとに非自明な擬準同形がえられ、そのコバウンダリーとして２次有界コホモロジーの元が得られる。

さて第１森田・マンフォード類 e_1 のグロモフ・セミノルムを(2g−2)で割った値の、g を無限大に飛ばした時の極限μを考える。このとき有界コホモロジーの一般論から、閉曲面上の種数２以上の閉曲面束 E について、その符号数の絶対値σとオイラー数χの間に不等式 $3\sigma \leqq \mu\chi$が成り立つ。そこで定数λを、底曲面の種数が２以上の全ての E に関する $3\sigma/\chi$の上限、とおけば明らかに$\lambda \leqq \mu$である。
予想２. $\lambda=1$ であろう。ちなみに E が代数曲面の場合、これは宮岡・Yau の不等式として知られている不等式と同値である。
問題１．　μをできるだけ詳しく評価せよ。例えば$\mu<\lambda$か？またマイヤー・コサイクルの存在から$\mu \leqq 6$ と判っているが、果たして$\mu<6$ だろうか？

さて閉曲面上の閉曲面束 E はシンプレクティック構造を許容する。一方シンプレクティック幾何の一般論より、負の向きをもつ複素射影曲面を E に何個か連結和したものは球面上の Lefshetz 束の構造を持つ。特異ファイバーの周りでのモノドロミーを考えると、Lefshetz 束はデータとしては、曲面の正のデーン捻りいくつかの並びであって、それらの積が自明になるようなものである。正のデーン捻り全体はデーン・カンドルという代数的対象をなし、ここからカンドル・コホモロジーとの関連が出て来る。

シンプレクティック幾何の超越的方法（ゲー

ジ理論や擬正則曲線の理論）によって示されたLefshetz束の定理としては、非負の自己差をもつ切断が存在すれば、そのLefshetz束は直積（つまり特異ファイバーを持たない）であるとか、自己交差マイナス１の切断をもてば非自明なファイバー和に分解しない、などがある。これらの定理をデーン・カンドルの代数的な問題として証明することは大変興味深い問題であると思われる。

位相空間Xの同相写像のなす群Homeo(X)はXのコホモロジー群H(X)に作用する。いま被覆変換群TをもつXのガロワ被覆Yを考えると同様にHomeo(Y)はH(Y)に作用する。ここでHomeo(Y)はHomeo(X)のTによる拡大であるから、Homeo(X)から、Auto(H(Y))(T)におけるTの正規化群のTによる商群への準同型写像が得られる。

このような構成は組紐群が忠実な線型表現を持つことの証明で現れているし、アレキサンダー多項式の構成の一つにも登場する。

ロイエンハとヘインはこの構成を曲面の有限アーベル被覆に対して行い、その像が定義上のcodomainの指数有限部分群になることを示している。

曲面の一般の有限ガロワ被覆にたいして同様にして得られる表現を考察することは興味深い問題と思われる。特にその像の大きさを評価することは難しい点を含んでいるように思われる。これは例えば被覆曲面の各１次元ホモロジー類がいつ底曲面上の単純閉曲線の逆像の連結成分で表されるか判定する有効な方法があれば解けるわけだが、それはおそらく容易ではない。

被覆をつかって既存の表現から新しい表現を得る方法はもちろん他にも応用できる。たとえば、リーマン面の平坦接続のモデュライ空間の幾何学的量子化から得られる写像類群の射影表現に、この構成を応用することは興味深い問題であると思われる。

２．研究の目的
レフシェッツ束のトポロジーと関連する写像類群の性質を研究するのが本研究の目的である。具体的には、写像類群の有限次元表現を調べることにより写像類群の有界コホモロジーに関する情報を得ること、またデーン・カンドルのカンドル（コ）ホモロジー群を調べる事により４次元レフシェッツ束の符号数の新しい表示を求めるのが目標である。

３．研究の方法
写像類群の有界コホモロジーについては写像類群の代数群への表現（のある族）を詳しくみる事で達成できると考えている。即ち写像類群の表現ρであって、その値域がある代数群Gの有理整数点のなす群G(Z)となるようなものが組織的に得られるのであるが、もしρの像の G(Z)における指数が無限と判れば、写像類群の有界コホモロジーについて非自明な結論が得られると期待される。カンドル小ホモロジーについては非可換コホモロジーのアイディアが重要に思われる。

４．研究成果
曲面の各有限被覆ごとに得られる写像類群の有限次元表現について、特にその像の大きさを評価する研究した。またカンドルコホモロジーとレフシェッツ束の関係についての野坂武史の仕事を検討し、そこから第１森田マンフォード類のグロモフ・ノルムについての評価を引き出す方法を研究した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
　　なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　神田　雄高（KANDA　YUTAKA）
　北海道大学・大学院理学研究院・助教
　研究者番号：30280861

(2)研究分担者
　　なし

(3)連携研究者
　　なし